Ao dividir cada metade em 4 partes iguais, teremos 8 partes iguais ao todo. Então, cada porção corresponde a $1/8$ da folha.

Logo, $\frac{1}{2} \div 4 = \frac{1}{8}$.

Avançando nas operações com frações

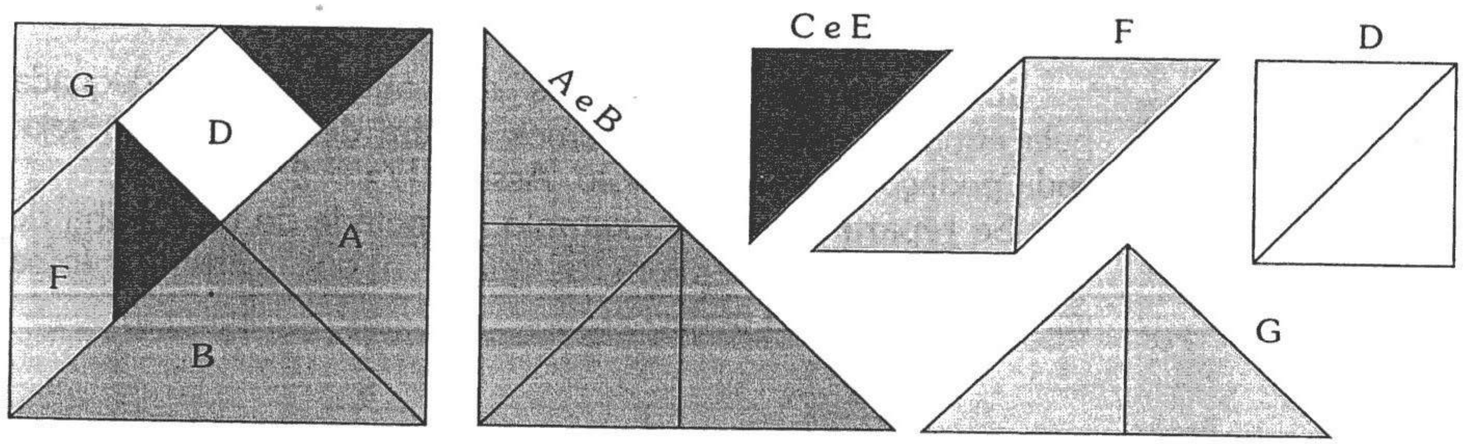
É muito útil, nessa etapa, explorar o conceito de *unidade de medida*. Para isso podem ser apresentadas diversas atividades em que os alunos escolhem uma parte ($1/n$) de determinada figura, que servirá como *unidade de referência* para medir cada porção da figura.

Esse tipo de trabalho é fundamental para que os alunos construam os algoritmos da adição e da subtração com frações de denominadores diferentes.

PRIMEIRA ATIVIDADE

Forneça aos alunos dois tangrans de mesmo tamanho. Peça que pintem cada parte com uma cor diferente e depois recortem só um dos tangrans, deixando o outro inteiro. A tarefa seguinte consiste em indicar a que fração do quadrado inteiro corresponde cada uma das partes.

Os alunos reconhecem facilmente que as peças A e B têm a mesma medida, e que cada uma representa $1/4$ da figura. Quanto às demais partes, há vários modos de raciocinar. Um deles é procurar uma peça que sirva como unidade de referência para medir as outras. Quando os alunos descobrem que as peças C e E têm a mesma medida e podem compor todas as outras partes, a questão está resolvida.



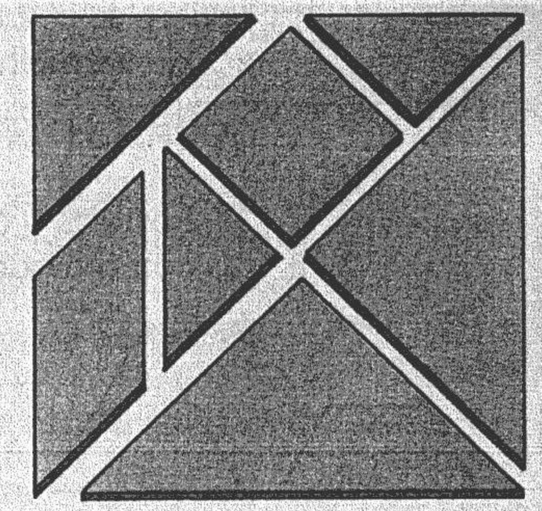
As peças C e E representam, cada uma, $1/16$ do quadrado; as peças D, F e G têm a mesma medida, representando, cada uma, $2/16$ (ou $1/8$) do quadrado.

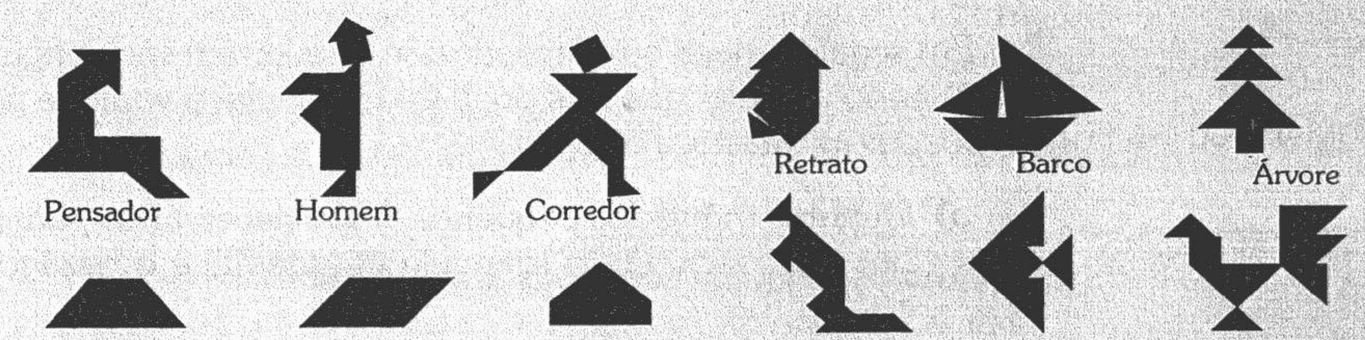
TANGRAM

Milenar jogo de quebra-cabeça chinês cujo nome original, Tch'i Tch'iao Pan, significa "as sete tábuas da argúcia". O Tangram é formado por 7 peças com formas geométricas, resultantes da decomposição de um quadrado. São 2 triângulos grandes, 2 triângulos pequenos, 1 triângulo médio, 1 quadrado, 1 paralelogramo.

A filosofia do Tangram é de que um todo é divisível em partes, as quais podem ser reorganizadas num outro todo. A idéia do jogo é que se reproduzam figuras apresentadas em silhueta, utilizando-se todas as 7 peças sem que haja sobreposição de nenhuma delas.

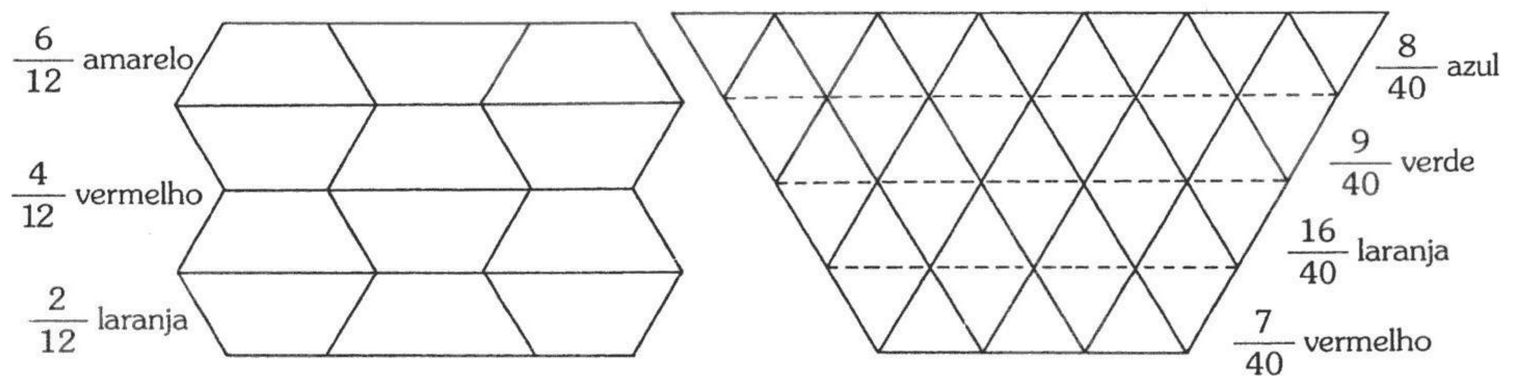
Há silhuetas desde as mais simples até aquelas muito difíceis de se obter.





SEGUNDA ATIVIDADE

Aqui, os alunos deverão colorir as figuras de acordo com as instruções das legendas:



(a) (b)

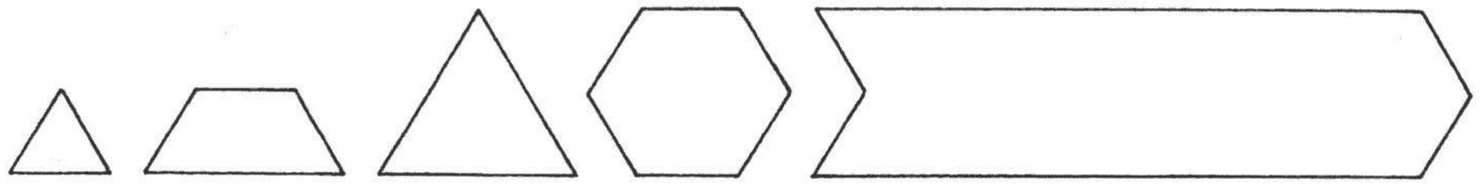
Observe-se que a figura *a* é formada por 12 trapézios congruentes. Assim, é fácil colorir cada porção indicada por uma fração de denominador 12. Cada trapézio é uma "unidade de referência" e, assim: $6/12$ são 6 trapézios; $4/12$ são 4 trapézios; $2/12$ são 2 trapézios.

Já na figura *b*, a situação se complica, pois as frações têm denominador 40 e não há 40 losangos. No entanto, se cada

losango for decomposto em 2 triângulos, haverá 40 deles na figura. Assim, a "unidade de referência" aqui é o triângulo, e podem-se colorir 8 triângulos de azul, 9 de verde, 16 de laranja e 7 de vermelho, conforme solicitado.

Terceira atividade

Forneça a cada aluno uma folha contendo as seguintes figuras como modelo:



Em seguida, peça que reproduzam e recortem várias figuras iguais às do modelo, que eles poderão manipular à vontade para responder às questões a seguir:

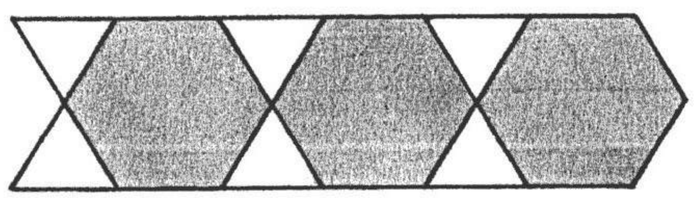
a) Quantos triângulos pequenos (I) são necessários para cobrir o trapézio (II), o triângulo grande (III) e o hexágono regular (IV)?

b) O triângulo pequeno corresponde a que fração do trapézio, do triângulo grande e do hexágono regular?

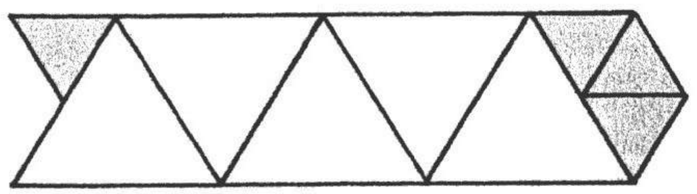
c) Quantas figuras de cada tipo são necessárias para cobrir o polígono não-regular (V)? A que fração desse hexágono (V) corresponde cada uma das demais figuras?

Diz-se que um polígono é *regular* quando *todos* os seus lados e *todos* os seus ângulos internos são congruentes.

Ao responder a essa pergunta, os alunos irão perceber que, no caso do triângulo pequeno e do trapézio, a resposta é direta, mas no caso do triângulo grande e do hexágono regular não é possível recobrir toda a figura diretamente. Será necessário decompor cada um deles em triângulos pequenos, para recobrir os espaços vazios do hexágono não-regular. Assim, o triângulo pequeno será a unidade de referência para a solução do problema.



(São 4 hexágonos; 3 inteiros e 1 decomposto em triângulos pequenos.)



(São 6 triângulos grandes; 5 inteiros e 1 decomposto em triângulos pequenos.)

Quarta atividade

Agora, os alunos podem começar a resolver problemas como os que seguem.

1. Uma pessoa tem um terreno e quer construir uma casa, de tal modo que:

a) $\frac{1}{4}$ do terreno seja ocupado pela casa;

b) $\frac{1}{2}$ do terreno se destine ao pomar;

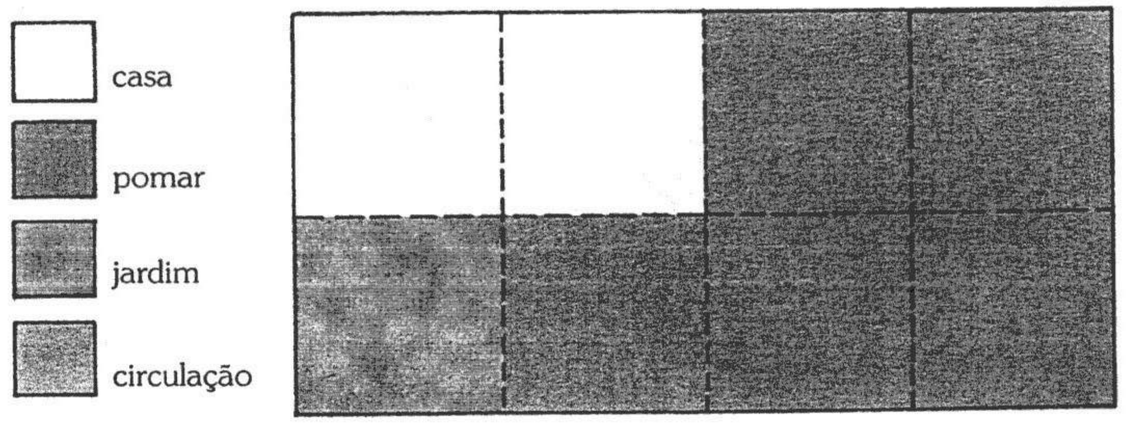
c) $\frac{1}{8}$ para o jardim;

d) $\frac{1}{8}$ para a circulação.

Desenhe uma planta para essa casa.
Há diferentes soluções para esse problema, como por exemplo:

É muito importante discutir com a classe todas as possibilidades encontradas pelos alunos.

Discutido e resolvido o problema, pode-se aumentar o grau de dificuldade:



2. O jardim e a área de circulação devem ficar em frente da casa.

3. Essa mesma casa deve ficar localizada no centro do terreno.

Inserida no atual movimento da educação matemática, esta obra constitui uma valiosa ferramenta aos atuais e futuros professores das séries iniciais. E não só porque propõe caminhos mas, sobretudo, porque esses caminhos apontam para muitos outros, revelando a riqueza de possibilidades presente no processo de aprender e ensinar matemática.

Como dois e dois trabalha com o desenvolvimento das habilidades matemáticas básicas a partir de problemas ligados à experiência prática do aluno, de jogos e situações que estimulam sua participação na construção de conceitos e de informações históricas que lhe permitem compreender a relevância da matemática como instrumento de transformação da realidade.

ÁREAS DE INTERESSE

- Formação de professores — magistério e psicopedagogia
- Metodologia e prática de ensino de matemática nas séries iniciais
- Graduação e licenciatura em matemática

OUTRAS ÁREAS DESTA COLEÇÃO

- Alfabetização
- Português
- Ensino de Arte
- Geografia
- História
- Educação Física
- Ciências
- Ensino Religioso

ISBN 85-322-3548-4

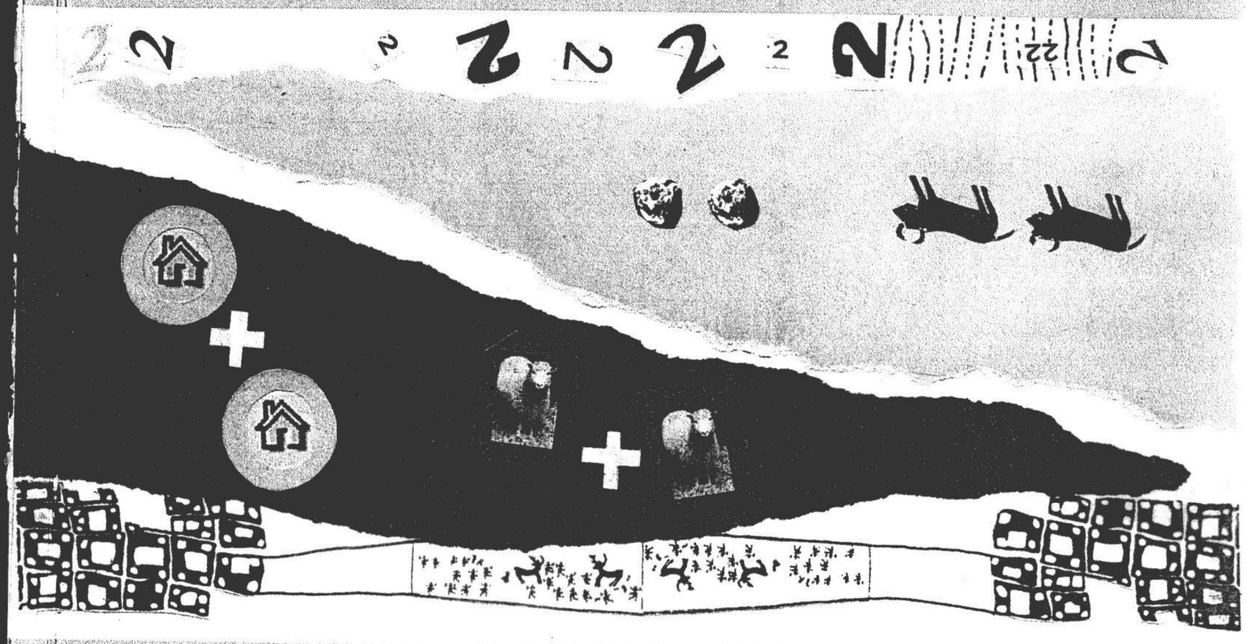
9 788532 235480

11699262

COMO DOIS E DOIS — MATEMÁTICA

Marília Toledo
&
Mauro Toledo

Didática de MATEMÁTICA



COMO DOIS e DOIS

A construção da matemática

FTD

Marília Toledo

Mestre em Educação Matemática e professora de disciplinas da área de exatas e de didática e prática de ensino de matemática, bem como de cursos de pós-graduação em Psicopedagogia, passou a integrar, em 1980, a equipe técnica de matemática da CENP (Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas) da Secretaria de Educação de São Paulo, onde realizou pesquisas sobre o processo de ensino-aprendizagem. Participou de projetos de elaboração e aplicação de documentos de apoio ao trabalho dos professores, tais como:

- *Atividades matemáticas*
- *Proposta curricular de matemática para ensino de 1º grau*
- *Projeto Ipê,* da TV Cultura
- Coleção *Prática Pedagógica*

Na FDE (Fundação para o Desenvolvimento da Educação), foi capacitadora em inúmeros cursos oferecidos a professores e monitores de matemática, de ciclo básico e de magistério.

Mauro Toledo

É professor de matemática, estatística, física e inglês na rede estadual de ensino.
Como educador, seu trabalho está concentrado no Ensino Fundamental, no Ensino Médio e nos cursos de formação para o magistério.

Avaliação - Mat. I
18/10

Mat I
24/10

Marília Toledo
Mauro Toledo

Tercio G. Kill

Didática de MATEMÁTICA

COMO DOIS e DOIS

A construção da matemática

FTD

VANGUARD
Pelotas

Todos os direitos de edição reservados à
EDITORA FTD S.A.
Matriz: Rua Rui Barbosa, 156 (Bela Vista) São Paulo - SP
CEP 01326-010 - Tel. (0-XX-11) 253-5011- Fax (0-XX-11) 284-8500 r. 298
Caixa Postal 65149 - CEP da Caixa Postal 01390-970
Internet: http://www.ftd.com.br
E-mail: exatas@ftd.com.br

Editores
Altivir João Volpe
Júnia La Scala

Editores assistentes
Margaret Presser
Silvana Vieira
Márcia Regina Takeuchi

Preparação e revisão de texto
Alice Kobayashi
Vera Lúcia Pereira Della Rosa
Fausto Alves Barreira Filho

Edição de arte
Tania Ferreira de Abreu

Diagramação
Eduardo Rossi da Silva
Kélia Cristina Botta

Ilustrações
Cecília Iwashita
Grego
Kélia Cristina Botta
Rosiane Oliveira (capa)

Projeto gráfico
Paulo Roberto Pachella
Roberto Soeiro (capa)

Coordenação de pesquisa iconográfica
Sônia Oddi

Pesquisa iconográfica
Elizete Moura Santos

Editoração eletrônica
Finalização: Terezinha de Fátima Joaquim Oliveira
Vânia Aparecida Maia de Oliveira
Coordenação: Carlos Rizzi
Reginaldo Damasceno

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Toledo, Marília
Didática de matemática : como dois e dois : a construção da matemática / Marília Toledo, Mauro Toledo. — São Paulo : FTD, 1997. — (Conteúdo e metodologia)

Bibliografia.

1. Matemática — Estudo e ensino I. Toledo, Mauro, 1964 — II. Título. III. Série.

97-2515 CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática: Formação de professores 372.7

apresentação

A coleção *Conteúdo e Metodologia* se destina a alunos de Magistério e Licenciatura — os futuros professores do Ensino Básico e Fundamental. Cada volume é dedicado a uma disciplina: Português, Matemática, História, Geografia, Ensino Religioso, Educação Artística, Educação Física, Ciências e, ainda Pré-escola e Alfabetização.

Os autores, com muitos anos de experiência na prática pedagógica, apontam os principais caminhos para o trabalho dos futuros professores — *o que* e *como* ensinar —, fornecendo-lhes subsídios para que possam construir seu próprio percurso.

Por meio de exemplos, de atividades didático-pedagógicas e da articulação entre teoria e prática, professor e aluno são convidados a aprender juntos, fazendo escolhas, selecionando alternativas, testando limites, questionando valores, métodos e tendências.

Desse modo, esperamos atingir os objetivos básicos da coleção *Conteúdo e Metodologia*: contribuir para a formação do professor e ampliar as possibilidades cognitivas da criança, eixos temáticos inseparavelmente ligados à formação da cidadania.

Os editores

Este livro é dedicado a todos os alunos com quem temos convivido, em um processo mútuo de ensino-aprendizagem.

SUMÁRIO

Introdução 07

1. O desafio de ensinar matemática 09

2. O conceito de número 16

3. Classificação 29

4. Séries e seqüências 46

5. O sistema de numeração decimal 57

6. Resolução de problemas 82

7. Operações com números naturais 97

I. Adição 101

II. Subtração 109

III. Multiplicação 120

IV. Divisão 145

8. Números racionais 166

I. As frações 167

II. Os números decimais 197

9. Geometria 220

I. Figuras não-planas 236

II. Figuras planas 244

10. Medidas 270

Palavras finais 302

Bibliografia 302

Anexos 304

Caderno de respostas 321

introdução

Pretendemos, neste trabalho, discutir o grande desafio que é ensinar matemática num mundo eminentemente tecnológico. Por que ensinar matemática? Quais são as reais necessidades do aluno? Qual a melhor metodologia? Quais os conteúdos essenciais?

Esta obra não pretende ser um manual do ensino da matemática, mas uma contribuição no sentido de romper os preconceitos que a cercam: difícil, impenetrável, repleta de normas e obscurecida por uma terminologia incompreensível.

Procuramos sugerir atividades que possam despertar a intuição matemática que há em todas as pessoas e relacioná-la — na profundidade permitida pela extensão desta obra — à teoria formal da matemática apresentada nos manuais tradicionais.

A autora Marília participou durante 10 anos da equipe técnica de Matemática da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (CENP) da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo. Várias das atividades sugeridas neste livro foram publicadas como Atividades Matemáticas (CENP/SE/SP) e testadas pela equipe na rede estadual de ensino.

Muito das teorias de Piaget e de outros pesquisadores aparece aqui, mas é aconselhável que o professor "beba direto da fonte", pois certamente ampliará ainda mais sua visão como educador.

A abordagem dos conteúdos de matemática tradicionalmente estudados nas séries iniciais do Ensino Fundamental baseou-se não apenas na experiência de vários autores, mas também

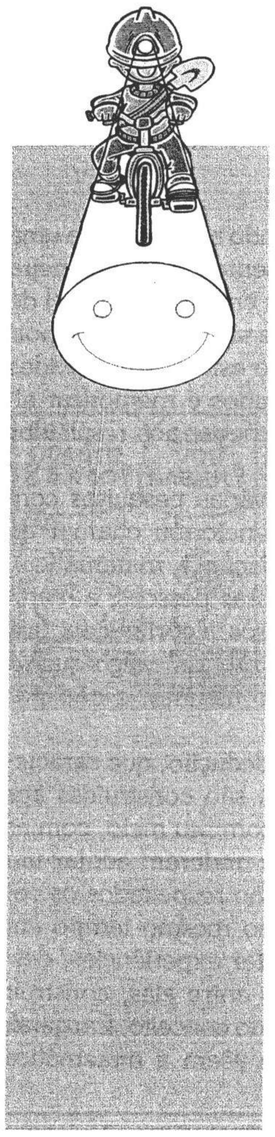
nas idéias de importantes pesquisadores de diversas áreas, como educação, matemática, didática, teorias de aprendizagem, história da matemática e psicopedagogia.

Os textos complementares de cada capítulo podem contribuir para despertar a noção de desenvolvimento da ciência e apontar para interpretações variadas da perspectiva matemática.

Sem dúvida alguma, é muito mais fácil para o professor de qualquer disciplina simplesmente "passar o ponto" no quadro-negro e deixar que os alunos "mais capazes" absorvam esse conhecimento. Mas certamente é muito mais proveitosa a aula em que o professor, em vez de expor suas "certezas", cria oportunidades para os alunos procurarem respostas e, em vez de monologar longamente, permite que haja troca de impressões e experiências. Desse modo, os alunos podem desenvolver suas habilidades de comunicação, formulação de hipóteses e crítica.

Esse professor, como é de esperar, estará mais exposto, pois numa sala em que há troca de idéias dificilmente há silêncio. A capacidade de criticar não pode ser limitada aos exercícios pedagógicos, por isso talvez seja tentador voltar aos métodos tradicionais. No entanto, quem já teve a oportunidade de experimentar essa relação de criação na sala de aula sabe como é instigante, como alimenta o espírito e estimula a ir mais longe, criar mais, ouvir mais, aprender mais.

Não temos a pretensão de dar a última palavra sobre o assunto. Nosso objetivo é levar o futuro professor a analisar, experimentar, criticar. Enfim, preparar-se para dar a *sua* palavra a respeito.



1

O DESAFIO DE ENSINAR MATEMÁTICA

Toda vida existe pra iluminar o
caminho de outras vidas
que a gente encontrar.

Milton Nascimento e Fernando Brant



No início do trabalho com qualquer disciplina, a primeira questão que ocorre ao professor é: "Por que essa disciplina consta do currículo escolar?". No caso específico da matemática, a resposta em geral é uma destas duas: "A matemática é necessária em atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade, como as que lidam com grandezas, contagens, medidas, técnicas de cálculo, etc." e "A matemática desenvolve o raciocínio lógico, a capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender o que é imediatamente sensível" (São Paulo/Cenp, 1991: 9).

Se consultarmos algumas pessoas sobre sua formação escolar em matemática, contudo, poucas concordarão que esses objetivos foram alcançados. As razões desse insucesso podem ser encontradas em várias direções. Exemplos: método de ensino inadequado; falta de uma relação estreita entre a matemática que se aprende nas escolas e as necessidades cotidianas; ou defasagem da escola quanto aos recursos tecnológicos mais recentes.

O método de ensino

Alguns professores consideram que, sendo a matemática uma ciência hipotético-dedutiva, deve ser apresentada dessa maneira desde as fases iniciais. Assim, exigem das crianças um nível de abstração e formalização que está acima de sua capacidade, pois os quadros lógicos de seu pensamento não estão desenvolvidos o suficiente. A saída encontrada pelos alunos é memorizar alguns procedimentos que lhes permitem chegar aos resultados exigidos pelo professor.

No mundo todo têm sido realizadas várias pesquisas com adultos que apresentam o que se convencionou chamar de *mathematics anxiety* (ansiedade em relação à matemática). Buerke (1982) detectou que, na visão dessas pessoas, a matemática é "um rígido conjunto de processos algorítmicos, que sempre produzem uma resposta bastante precisa", algo que só pode ser manipulado por especialistas no assunto, e não por "gente comum".

Para outros professores, as regras de dedução, que caracterizam o raciocínio matemático do adulto, são construídas aos poucos, à medida que a criança interage com seu meio, com as pessoas que a cercam. Esses professores preferem adotar um método mais intuitivo, indutivo, em que são respeitados os conhecimentos já construídos pelo aluno, ao mesmo tempo em que lhe são dadas oportunidades de realizar experiências, descobrir propriedades, estabelecer relações entre elas, construir hipóteses e testá-las, chegando a determinado conceito. Em geral, os alunos desses professores são os que vêem a matemática com mais tranqüilidade e segurança.

ALGORITMO: RECEITA PARA CALCULAR

Quando alguém vai fazer um bolo pela primeira vez deve seguir todos os passos de uma receita: "Coloque, em primeiro lugar, a manteiga, depois as gemas. Bata muito bem. Acrescente a farinha...". Conforme vai adquirindo prática na cozinha, descobre mais coisas e começa a se libertar das receitas, fazendo o bolo a seu modo e certamente bem melhor que o primeiro. Podemos dizer que a receita é uma espécie de algoritmo para se fazer um bolo.

Em matemática, definimos algoritmo como uma seqüência de um número finito de procedimentos, realizados para se chegar ao resultado de um cálculo — por exemplo, "para somar duas frações, reduza-as ao mesmo denominador, mantenha esse denominador e some os numeradores obtidos".

Pesquisando a história da matemática, verificamos que diferentes povos utilizavam diferentes algoritmos para uma dada operação aritmética — o que, na verdade, ainda hoje acontece. Isso nos mostra que não se pode assumir uma atitude intransigente em relação aos alunos ("Só aceito a divisão pelo processo breve"; "Aluno meu só pode fazer a subtração de baixo para cima", etc.), pois cada um deve ter a liberdade de utilizar o algoritmo com o qual se adapte melhor.

Atualmente, a grande difusão de calculadoras e computadores começa a exigir que as escolas repensem seus métodos no que se refere ao ensino dos cálculos aritméticos.

Matemática X cotidiano

Uma pergunta comum entre os alunos é: "Para que eu preciso aprender isso?". Embora um dos objetivos explícitos do ensino da matemática seja preparar o estudante para lidar com atividades práticas que envolvam aspectos quantitativos da realidade, isso acaba não acontecendo. Então, exceto por alguns problemas de compras, pagamento e troco, a questão continuaria válida, porque grande parte do conteúdo, na maioria das vezes, continua sendo tratada de modo totalmente desligado do que ocorre no dia-a-dia da escola e da vida dos alunos.

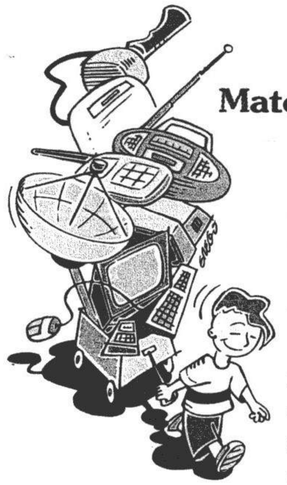


(SCHULZ, *Jornal da Tarde*, 8/11/1995.)

Mais que listas de exercícios e problemas-tipo, que a criança resolve "só para treinar", seria importante que professores e alunos estivessem voltados para os aspectos matemáticos das situações do cotidiano, estabelecendo os vínculos necessários entre a teoria estudada e cada uma dessas situações.

E o cotidiano está repleto de situações matemáticas. Por exemplo: sempre que precisamos tomar uma decisão importante, pesamos todos os fatores envolvidos e procuramos um meio de organizá-los da melhor forma, estudando as várias possibilidades; nesse momento, estamos utilizando o *raciocínio combinatório*. As pessoas que cozinham utilizam seus próprios

algoritmos, e para aumentar ou diminuir o tamanho da receita empregam o *raciocínio proporcional* ("se para 4 xícaras de farinha coloco 3 ovos, para 6 xícaras, devo colocar..."); o mesmo faz um viajante ao calcular que velocidade média deverá imprimir ao carro para chegar ao seu destino em um determinado tempo.



Matemática em tempo de *game*

O rápido avanço da tecnologia tem permitido produzir, a custos cada vez mais baixos e em quantidades cada vez maiores, aparelhos de tevê, antenas parabólicas, telefones celulares, calculadoras, computadores e inúmeros outros aparelhos eletrônicos de uso doméstico, colocando-os ao alcance de parcelas cada vez mais amplas da população.

Hoje é normal o uso de calculadoras por donas de casa durante as compras, por comerciantes, por crianças que conferem as contas da lição de casa, etc. Também é normal acompanhar ao vivo, pela tevê, um furacão devastando uma cidade da Flórida ou um vulcão cuspindo lava na África. Ou, ainda, as crianças utilizarem microcomputadores domésticos para se divertir com *video games* e vencer a maioria dos adultos que se atrevem a enfrentá-las...

Com tantos meios de informação e diversão, entende-se que os alunos reajam ao ambiente escolar de modo bem diferente daquele esperado até poucos anos atrás. Assim, é necessário ter em mente que aquilo que funcionou bem nas escolas até a década de 70 já não está surtindo efeito nos anos 90 e estará obsoleto no início do século XXI.

Diante, portanto, dessa nova realidade de calculadoras e computadores, é primordial repensar os objetivos da matemática, especialmente a elementar. Se antes era necessário fazer contas rápidas e corretamente, hoje é importante saber *por que os algoritmos funcionam*, quais são as idéias e os conceitos neles envolvidos, qual a *ordem de grandeza de resultados que se pode esperar* de determinados cálculos e quais as *estratégias mais eficientes* para enfrentar uma situação-problema, deixando para as máquinas as atividades repetitivas, a aplicação de procedimentos padrões e as operações de rotina.

Com o ritmo acelerado das mudanças tecnológicas, seria muito difícil — e mesmo temerário — fazer previsões sobre quais conteúdos da matemática serão mais úteis aos alunos no futuro. No entanto, pode-se ter certeza de estar no caminho correto quando as crianças são preparadas para enfrentar situações novas com criatividade e entusiasmo diante do desafio, em vez de ser apenas instrumentalizadas com fórmulas e modelos-padrão para aplicar em situações conhecidas e específicas.



COMPLEMENTAR

1. [Filhos da terceira onda]

Uma nova civilização está emergindo em nossas vidas e por toda parte há cegos tentando suprimi-la. Essa nova civilização traz consigo novos estilos de família, modos de trabalhar, amar e viver diferentes; uma nova economia; novos conflitos políticos; e, além de tudo isso, igualmente uma consciência alterada. Fragmentos dessa civilização já existem. Milhões de pessoas já estão sintonizando suas vidas com o ritmo de amanhã. Outros, aterrados diante do futuro, estão empenhados numa fuga inútil para o passado e tentam restaurar o mundo moribundo que lhes deu o ser.

A alvorada dessa nova civilização é o fato mais explosivo das nossas vidas.

É o evento central — a chave para compreender os anos imediatamente à frente. É um evento tão profundo como a Primeira Onda de mudança, desencadeada há dez mil anos pela descoberta da agricultura, ou o terremoto da Segunda Onda de mudança, provocado pela Revolução Industrial. Somos os filhos da transformação seguinte, a Terceira Onda. [...]

A Terceira Onda traz consigo um modo de vida genuinamente novo, baseado em fontes de energia diversificadas e renováveis; em métodos de produção que tornam obsoletas as linhas de montagem das fábricas; em novas famílias não-nucleares; numa novel instituição que poderia ser chamada a "cabana eletrônica"; e em escolas e companhias do futuro, radicalmente modificadas. A civilização nascente escreve um novo código de comportamento para nós e leva-nos além da padronização, da sincronização e da centralização, além da concentração de energia, dinheiro e poder.

(TOFFLER, Alvin. *A terceira onda*. Rio de Janeiro, Record, 1980. p. 23.)

2. [Uma educação cidadã]

O professor deve ser um investigador. Investigador, porque comprometido com um conhecimento de técnicas pedagógicas, com um domínio de conteúdos escolares e com a experiência acumulada em seu trabalho docente. Além disso, porque deve considerar algo que não está nos livros, que ele não pode conhecer de antemão, uma vez que se trata do saber de seus alunos, das hipóteses, das relações que fazem, do sentido que o estudo e a escola têm para eles.

A postura do professor construtivista é experimental porque se trata de dar aulas como um projeto de trabalho, em que os conhecimentos são aprofundados e ampliados, em que se aperfeiçoam as formas anteriores de ensinar. Experimental porque há um espírito de novidade, de criatividade, de ir mais a fundo, porque há interesse, gozo na produção do conhecimento; mas, ao mesmo tempo, há sistematização, há transmissão, há compromisso com o que se sabe sobre os conteúdos, há conservação das experiências passadas. Ou seja, o espírito experimental do professor é seu compromisso com o futuro, no presente da sala de aula.

O espírito transmissivo, igualmente, é seu compromisso com o passado no presente, com as coisas que não podem ser esquecidas. E isso o leva à necessidade contínua de

um melhor conhecimento, ou a uma constante atualização com respeito aos conteúdos escolares, junto com uma correspondente consideração das características do desenvolvimento e da aprendizagem de seus alunos. E, além disso tudo, pode-se acrescentar mais uma outra necessidade: coordenar todos esses pontos de vista com uma educação comprometida com a cidadania das crianças.

(Macedo, Lino de. *Ensaios construtivistas.* 2. ed. São Paulo, Casa do Psicólogo, 1994. p. 60-1.)

3. [Como ensinar matemática hoje?]

Atualmente, várias são as propostas de trabalho para o ensino consistente de matemática.

[...] *Resolução de problemas.* Essa proposta, mais atual, visa à construção de conceitos matemáticos pelo aluno através de situações que estimulam a sua curiosidade matemática. Através de suas experiências com problemas de naturezas diferentes o aluno interpreta o fenômeno matemático e procura explicá-lo dentro de sua concepção da matemática envolvida. [...]

Nesse processo o aluno envolve-se com o "fazer" matemática no sentido de criar hipóteses e conjecturas e investigá-las a partir da situação-problema proposta.

Modelagem. Tem sido utilizada como uma forma de quebrar a forte dicotomia existente entre a matemática escolar formal e a sua utilidade na vida real. Os modelos matemáticos são formas de estudar e formalizar fenômenos do dia-a-dia. Através da Modelagem matemática o aluno se torna mais consciente da utilidade da matemática para resolver e analisar problemas do dia-a-dia. [...]

Etnomatemática. Tem como objetivo primordial valorizar a matemática dos diferentes grupos culturais. Propõe-se uma maior valorização dos conceitos matemáticos informais construídos pelos alunos através de suas experiências, fora do contexto da escola. [...]

Essa proposta de trabalho requer uma preparação do professor no sentido de reconhecer e identificar as construções conceituais desenvolvidas pelos alunos [...]

História da matemática. Tem servido como motivação para o desenvolvimento de diversos conceitos matemáticos. Esta linha de trabalho parte do princípio de que o estudo da construção histórica do conhecimento matemático leva a uma maior compreensão da evolução do conceito, enfatizando as dificuldades inerentes ao conceito que está sendo trabalhado. Essas dificuldades históricas têm-se revelado as mesmas muitas vezes apresentadas pelos alunos no processo de aprendizagem.

Esse estudo está muito relacionado com o trabalho em etnomatemática, pois mais e mais são revelados estágios de desenvolvimento matemático em diferentes grupos culturais que se assemelham aos estágios de desenvolvimento histórico de diferentes conceitos. [...]

O uso de computadores. Acredita-se que metodologia de trabalho dessa natureza tem o poder de dar ao aluno a autoconfiança na sua capacidade de criar e fazer matemática. Com essa abordagem a matemática deixa de ser um corpo de conhecimentos prontos e simplesmente transmitidos aos alunos e passa a ser algo em que o aluno faz parte integrante do processo de construção de seus conceitos.

Jogos matemáticos. Com uma tendência no nosso ensino à supervalorização do pensamento algorítmico, tem-se deixado de lado o pensamento lógico-matemático além do pensamento espacial. A proposta desse grupo é de desenvolver esses dois tipos de raciocínio na criança por meio de jogos de estratégias, trabalhando, também, a estimativa e o

cálculo mental. Acredita-se que no processo de desenvolvimento de estratégias de jogo o aluno envolve-se com o levantamento de hipóteses e conjecturas, aspecto fundamental do pensamento científico, inclusive matemático. [...]

O mais interessante de todas essas propostas é o fato de que elas se complementam. É difícil, num trabalho escolar, desenvolver a matemática de forma rica para todos os alunos se enfatizarmos apenas uma linha metodológica.

(Adaptado de: D'Ambrosio, Beatriz S. In: *Temas & Debates*, ano II, n. 2, 1989. p. 15-8.)

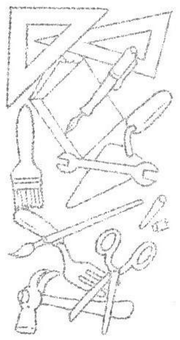


a) Que relações podemos estabelecer entre as idéias de Alvin Toffler, Lino de Macedo e as considerações feitas até aqui sobre o ensino da matemática?

b) Em grupo, analise as tendências predominantes na matemática sintetizadas no texto "Como ensinar matemática hoje?".

c) Entreviste alguns professores de matemática construtivistas para saber como tem sido, na prática, o seu dia-a-dia na sala de aula. A leitura dos textos de Lino de Macedo e de Beatriz D'Ambrósio pode auxiliá-lo a montar o roteiro da entrevista.

Para você fazer



1. Pergunte a professores que ensinam matemática, e também a alguns alunos, o que acham dessa matéria. Discuta com seus colegas as respostas obtidas.

2. Em alguns países, como França e Estados Unidos, têm surgido grupos de educadores que defendem o retorno da escola aos métodos tradicionais, que eles consideram mais eficientes que os atuais. Qual é a sua opinião a respeito?

3. Escreva uma lista das coisas que você fez ontem que envolvem conceitos matemáticos.

PARA SABER MAIS

Fernandes, Alícia. *A inteligência aprisionada*. Porto Alegre, Artes Médicas, 1991.

Macedo, Lino. *Ensaios construtivistas*. São Paulo, Casa do Psicólogo, 1994.



2

O CONCEITO DE NÚMERO

Eu sou trezentos, sou trezentos e sessenta;
mas um dia afinal me encontrarei comigo.

Oswald de Andrade

O que é número?

Quando perguntamos a um grupo de pessoas o que é número, notamos a princípio certo constrangimento. Realmente, é estranho não termos, na ponta da língua, uma definição para algo tão familiar. Usamos números o tempo todo em nossa vida: para tomar um ônibus, fazer um pagamento, encontrar um endereço, saber a idade da vizinha...

Diante dessa pergunta, aos poucos as pessoas começam a organizar as idéias, e surgem respostas como: "É quantidade"; "É um símbolo"; "É um símbolo que representa uma quantidade". Em geral, alguém corrige: "O símbolo não é número; é numeral".

E você? Qual é a sua própria definição de número?

Se não a tiver, não se preocupe. Grandes pensadores também enfrentaram essa dificuldade, e nem sempre estiveram de acordo sobre o assunto, como mostram os exemplos a seguir (MAGNUSSON JR. & MAMERI, 1994: 2-3):

> É a expressão que determina uma quantidade de coisas da mesma espécie. (BALTZER, 1814-1887)

> É a adição sucessiva de uma unidade. (KANT, 1724-1804)

> É uma coleção de objetos de cuja natureza fazemos abstração. (BROUTROUX, 1845-1921)

> É a classe de todas as classes equivalentes a uma classe. (RUSSELL, 1872-1970)

Até cerca de 1960, a maior parte dos professores de matemática se limitava a transmitir aos alunos noções relativas ao chamado *conhecimento social*, como as palavras e os símbolos que designam as quantidades e a contagem de rotina. Como não tinham muito claro o conceito de número, sentiam dificuldade em ajudar a criança a construí-lo.

A partir desse período, contudo, o movimento Matemática Moderna originou uma série de mudanças no currículo. No mundo todo passou-se a enfatizar a importância da teoria dos conjuntos no ensino da matemática desde a fase elementar, e ganharam espaço as pesquisas de Piaget relativas à construção do número pela criança.

Alguns professores adotaram a definição de número como "a designação de uma classe de coleções que têm a mesma quantidade de elementos (aspecto cardinal) e que ocupa certa posição em uma série (aspecto ordinal)"

Para representar um número, a criança pode inventar um *símbolo*, pois este guarda semelhanças com o objeto representado (por exemplo, ooo ou III ou *** podem ser símbolos usados para representar a quantidade "três"). Já o *signo* é criado por convenção e não guarda nenhuma semelhança com o objeto representado (por exemplo, o numeral 3 e a palavra falada "três").

(SANTOS, 1990: 26). Concluíram, assim, que o trabalho com noções ligadas a conjuntos facilitava a construção do conceito de número pela criança.

O que se viu, no entanto, foi um trabalho puramente teórico e abstrato, no qual se priorizava a representação simbólica (∈, ⊂, { }, ∅, ∩, ∪, etc.), algo que os alunos das séries iniciais não tinham condições de acompanhar.

Hoje, feita uma avaliação dos erros e acertos dessa visão e pesquisando-se a evolução do conceito de número, conclui-se que a criança precisa trabalhar com *coleções de objetos*. Objetos que ela possa manipular, observar, descobrindo as propriedades, juntando por semelhanças, separando por diferenças, estabelecendo correspondências um a um entre os elementos de duas coleções para comparar quantidades. Enfim, a criança precisa criar todo tipo de relação que a leve aos poucos ao conceito de número como conhecimento lógico-matemático.

O CONHECIMENTO HUMANO

Segundo Piaget, há três tipos de conhecimento: o físico, o social e o lógico-matemático.

Conhecimento físico é o que obtemos por meio da observação dos objetos na realidade externa. Exemplos: a cor de um objeto, o material de que ele é feito, o peso, o tamanho, etc.

Conhecimento social é aquele que herdamos da cultura do meio em que vivemos. Por exemplo: dizer "alô" quando atendemos ao telefone; saber o nome do "homem que descobriu o Brasil". Esse tipo de conhecimento só pode ser adquirido por transmissão e é totalmente arbitrário, exigindo, por isso mesmo, memorização. Embora não seja recomendável o ensino de matemática calcado unicamente na memorização de regras e definições, não se pode desprezar essa forma de reter o conhecimento. Ao estudar matemática, é necessário que decoremos a seqüência dos números naturais, os nomes das figuras geométricas e muitos outros dados.

O *conhecimento lógico-matemático* resulta das relações que o sujeito estabelece com ou entre os objetos, ao agir sobre eles. Por exemplo, ao observar duas bolas, uma azul e uma vermelha, a criança pode perceber-lhes a forma (conhecimento físico) e aprender que se chamam "bolas" (conhecimento social). No âmbito da experiência lógico-matemática, ela pode pensar que as bolas são "iguais" (ambas são bolas) ou "diferentes" (uma é azul, a outra é vermelha). Essa semelhança ou diferença não está em cada uma das bolas, isoladamente, mas foi criada na mente da criança no momento em que ela relacionou os objetos "bolas".

Assim, enquanto o conhecimento físico deriva das propriedades físicas dos próprios objetos, o conhecimento lógico-matemático tem origem no próprio sujeito.

Na verdade, porém, é impossível separar totalmente os três tipos de conhecimento, pois eles sempre se apresentam juntos.

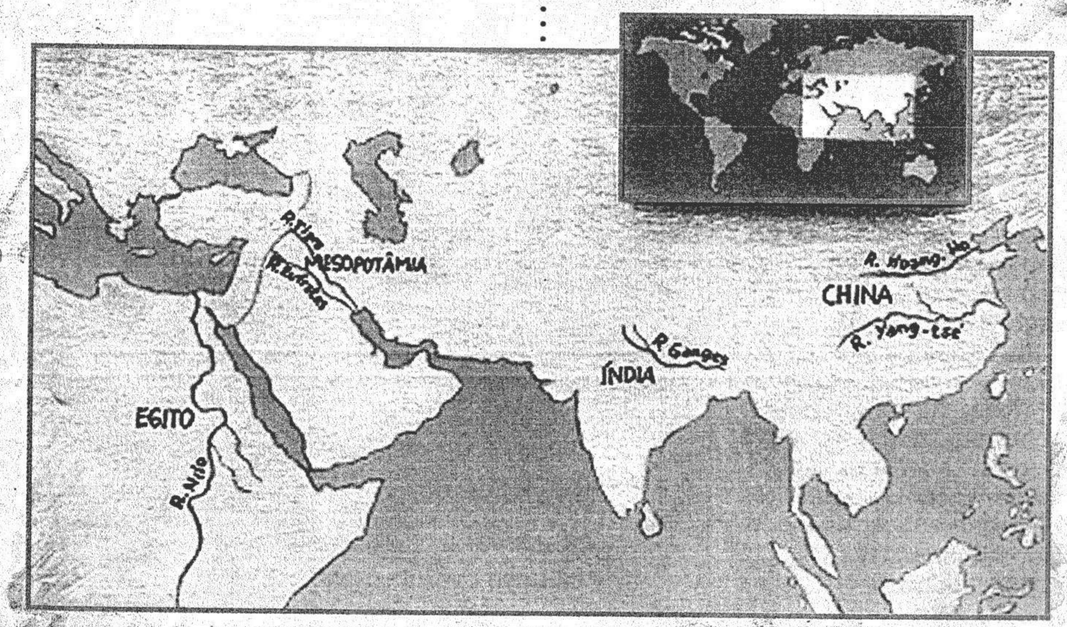
Um pouco de história

Como terá nascido a idéia de número? As pesquisas arqueológicas sempre mostram o homem vivendo em grupos, inicialmente nômades, alimentando-se da caça, da pesca, do pastoreio ou da pilhagem de outros grupos. Nos tempos primitivos não havia posses individuais e, assim, não era necessário contabilizá-las. Estudos de línguas confirmam essa idéia, mostrando diferenciações apenas para os termos *um*, *dois* e *muitos*.

Com o fim da glaciação e o recuo do gelo para os pólos, as plantas começaram a nascer. Há cerca de 10 mil anos, nossos antepassados descobriram que podiam alimentar-se delas e, assim, aos poucos foram se estabelecendo nos vales às margens de grandes rios, como o Nilo, no Egito, o Tigre e o Eufrates, na Mesopotâmia, o Ganges, na Índia, e o Yang-tsé e o Amarelo, na China.

A partir daí, teve início um novo modo de vida, com terra cultivada, aldeias e a necessidade cada vez maior de organização: o planejamento (ainda que muito rudimentar) da produção das terras, dos rebanhos; a divisão das áreas cultiváveis, das colheitas; a quantificação (*quantos* animais nós temos?, *quanto* de sementes precisamos?, *quantas* luas até a próxima colheita?).

Dessas primeiras necessidades de contagem até o conceito de número, muitas gerações transcorreram, deixando-nos sua contribuição. Parece que os sinais para números surgiram antes das palavras para indicá-los. Isso porque é mais fácil indicar com os dedos das mãos o total de elementos de uma coleção (um dedo para cada elemento) do que criar uma palavra para isso.



Contando pedrinhas

Quando os dedos das mãos se mostraram insuficientes para registrar quantidades maiores, nossos antepassados provavelmente começaram a usar montes de pedrinhas, uma para cada objeto a ser representado. A necessidade de conservar a informação deve ter levado à substituição das pedrinhas por *marcas* em ossos, em bastões e nas paredes das cavernas, por *nós* em cordinhas, etc.

Comparando os elementos de duas coleções — por pareamento —, nossos antepassados foram construindo as relações *mais que, menos que, tantos quanto*, ampliando assim seu vocabulário relativo à quantificação, que antes consistia em *um, dois, muitos*. Ao comparar ovelhas e pedrinhas, o pastor podia saber se faltavam ovelhas ou não.

De onde vem a idéia de número

Todos os vestígios sobre a vida de nossos antepassados levam os pesquisadores a crer que foi a partir da experiência com muitos conjuntos em *correspondência biunívoca* que a humanidade concebeu a idéia de número.

Correspondência biunívoca é definida como a correspondência entre os elementos de dois conjuntos, de modo que a cada elemento de um deles corresponda um e apenas um do outro e que, ao término do pareamento, não sobre elemento em nenhum dos conjuntos.

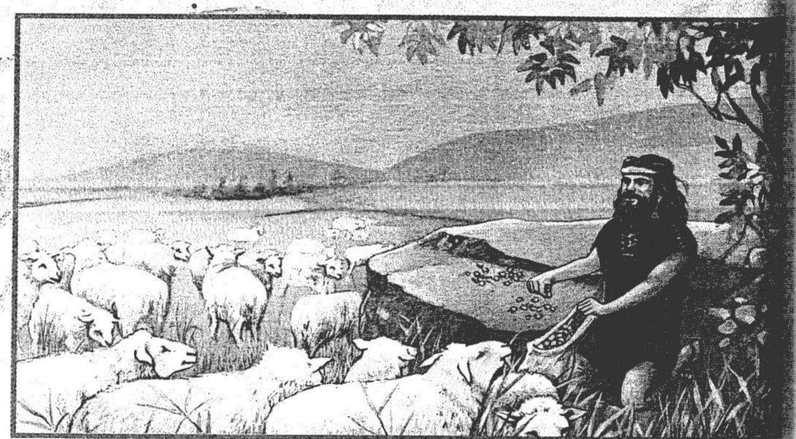
Pode-se imaginar o esforço de abstração do homem primitivo para extrair a *idéia de dois* da observação de conjuntos como os olhos, as mãos, os pés, as asas de um pássaro, etc.



Dois olhos, quatro patas

Antes que o homem pudesse contar, teve de criar coleções-modelo, cada uma representando uma quantidade. Como afirma Dantzig (1970: 20), "os homens primitivos encontram tais modelos em seu ambiente imediato: as asas de um pássaro podem simbolizar o número dois; um trevo, três; as patas de um animal, quatro; seus próprios dedos, cinco. A prova dessa origem em tais palavras numéricas pode ser encontrada em muitas línguas primitivas".

Criado o sistema numérico para contar os elementos de uma coleção, bastou fazer a correspondência biunívoca entre ambos.



A construção dos números

Sabemos que a criança entra em contato com os números desde muito cedo, no contexto familiar e social: sua idade, número de sua casa ou telefone, número do seu canal de televisão preferido, ou do andar onde mora, etc.

Esse contato, embora informal, é de grande importância, pois oferece condições de familiarização com o conceito, e a criança começa a estabelecer suas primeiras hipóteses a respeito do processo de representação de quantidades.

Assim, nada impede que uma criança de 4 ou 5 anos represente o número de sua casa, ou que registre, no desenho que acabou de fazer, o dia do mês e o ano. Isso não significa, no entanto, que ela de fato tenha *construído* o número.

Vejamos quais são as estruturas operatórias envolvidas nesse processo.

Ordem e inclusão hierárquica

Para a pesquisadora piagetiana Constance Kamii (1984: 19), "número é uma síntese de dois tipos de relação que a criança elabora entre os objetos. Uma é a *ordem* e a outra é a *inclusão hierárquica*".

Muitas vezes, quando pedimos a uma criança que conte alguns objetos, o que ela faz é reproduzir a seqüência numérica decorada, sem se preocupar se contou mesmo todos os objetos ou se algum deles foi contado mais de uma vez.



Segundo Piaget, *ordem* é a nossa necessidade lógica de estabelecer uma organização (que não precisa ser espacial) entre os objetos, para termos certeza de que contamos todos e de que nenhum foi contado mais de uma vez.

Quando observamos uma criança em seus primeiros contatos com os números, percebemos que, ao contar, ela recita os "nomes" dos números, do mesmo modo que recitaria os nomes de algumas pessoas. Assim, depois de contar cinco brinquedos, se lhe pedirmos que indique o cinco ela mostrará o quinto brinquedo contado, como se "cinco" fosse o nome dele.

Na perspectiva de Piaget, *inclusão hierárquica é* a capacidade de perceber que o "um" está incluído no "dois", o "dois" no "três", e assim por diante, de modo que os cinco brinquedos são o grupo todo.



Ainda envolvendo a inclusão hierárquica, temos a *conexidade*. Uma pesquisa realizada por Morf e Piaget (KAMII, 1984: 28) conclui que, "embora a estrutura mental do número seja bastante bem-formada em torno dos 5 para 6 anos, possibilitando à maioria das crianças a conservação do número elementar, ela não está suficientemente estruturada antes dos 7 anos e meio de idade para permitir que a criança entenda que todos os números consecutivos estão conectados pela operação de "+ 1".

A esse respeito, Kamii (idem, p. 49) relata um fato que ilustra a questão da conexidade:

> João Pedro estava com 5 anos de idade e sabia contar até mais ou menos trinta, quando sua mãe lhe pediu que colocasse um guardanapo para cada um dos pratos que já estavam colocados à mesa para o almoço. Eram quatro pratos. O menino foi ao armário, pegou um guardanapo e o colocou sobre o primeiro prato; voltou para pegar o segundo e assim foi fazendo até completar os quatro.
>
> Em várias ocasiões, continuou realizando esse trabalho para a mãe, com suas quatro viagens ao armário.
>
> Aos 5 anos e 4 meses, ele contou espontaneamente os quatro pratos, foi ao armário, contou quatro guardanapos e os trouxe para a mesa. Continuou, nos outros dias, com essa estratégia.
>
> Alguns dias depois, sua mãe avisou-o de que naquele dia teriam um hóspede para almoçar com eles. João Pedro pegou seus habituais quatro guardanapos e, ao distribuí-los, percebeu que um prato estava sem guardanapo. Recolheu todos os já distribuídos e retomou a estratégia anterior, fazendo cinco viagens para completar sua tarefa.

O texto mostra que, para João Pedro, o total "cinco" não podia ser obtido a partir do quatro, com a operação de "+ 1".

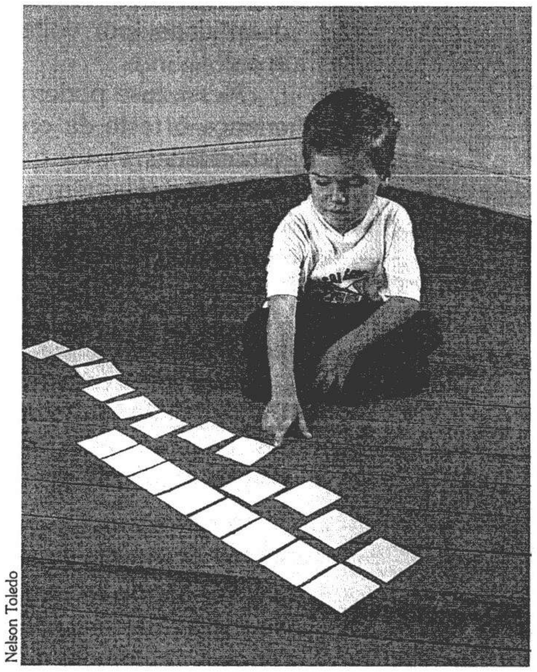
Conservação de quantidades

Antes de chegar ao conceito de número, é necessário que a criança conserve quantidades. Para verificar se ela compreende que determinada quantidade permanece constante, Piaget pesquisou a conservação de quantidades tanto nas grandezas de natureza *discreta* (como o número de volumes de uma coleção de livros ou o número de indivíduos de um grupo de pessoas) quanto nas de natureza *contínua* (como a medida da superfície de um tampo de uma mesa ou o comprimento de um fio de barbante).

A conservação de quantidades é um processo que ocorre de modo gradual. Isso significa que uma criança já pode conservar quantidades discretas mas não ainda massa ou volume, por exemplo.

No caso do conceito de número natural, é imprescindível que a criança esteja segura de que a quantidade de objetos de uma coleção permanece a mesma quando se modifica seu arranjo espacial.

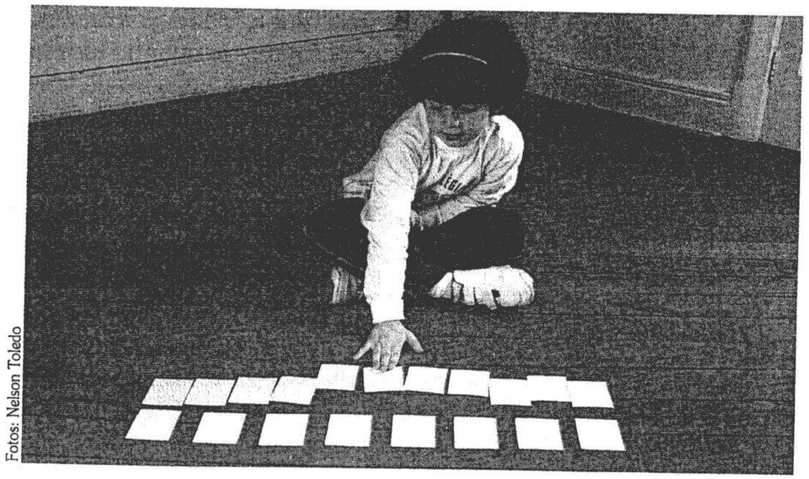
A conservação de quantidades depende de uma condição mental que Piaget chama de *reversibilidade*, e que se refere à capacidade de fazer e desfazer mentalmente a mesma ação. A partir do momento em que uma criança nasce, já se inicia o processo contínuo de sua interação com o meio em que vive. É esse processo que vai tornando seu pensamento cada vez mais flexível, permitindo que, por volta dos 7 ou 8 anos, a reversibilidade já tenha sido conquistada.


Nelson Toledo

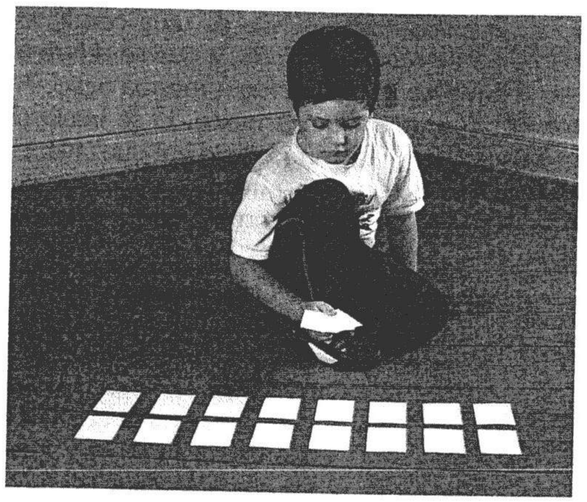
Uma das provas piagetianas sobre a conservação de quantidades discretas pode ilustrar essa idéia. Apresentamos a uma criança de 3 a 4 anos uma fila com cerca de oito objetos (por exemplo, fichas amarelas). A seguir, deixamos à sua disposição uma quantidade bem maior de objetos do mesmo tipo (por exemplo, as mesmas fichas, mas de cor verde). Então, pedimos a ela que faça uma nova fila com "o mesmo tanto" de fichas que a outra.

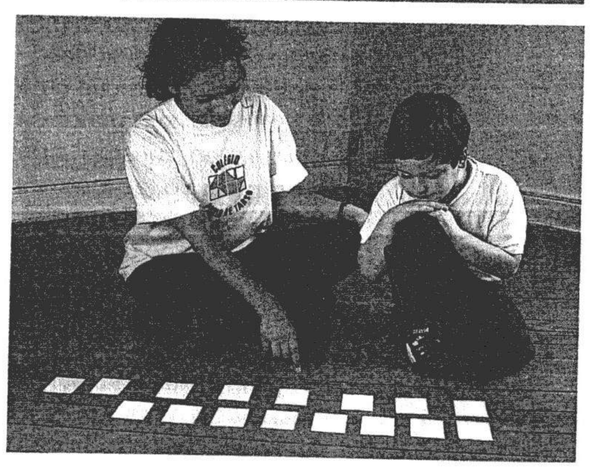
Numa fase inicial, a criança faz uma fila com todas as fichas disponíveis.

A criança de uma fase mais avançada coloca suas fichas sem se preocupar com a quantidade, mas procurando respeitar os limites impostos pelas extremidades da fila de fichas amarelas.



Fotos: Nelson Toledo





Essas crianças demonstram que ainda não construíram um critério que lhes permita decidir sobre a igualdade das quantidades; isso indica que sua estrutura mental de número ainda não está construída.

Na etapa seguinte, a criança já faz o pareamento das fichas e consegue arranjá-las com a mesma quantidade (por volta dos 4 ou 5 anos).

Nessa fase podemos oferecer à criança o teste da conservação de quantidades. Desde que ela acredite que as duas filas têm a mesma quantidade de objetos, modificamos a apresentação de uma das filas — na presença da criança —, diminuindo ou aumentando o espaço entre as fichas.

Ao pedir à criança que compare a quantidade de fichas das duas filas, podemos esperar diferentes tipos de reação:

- Ela simplesmente acha que a fila mais comprida tem mais fichas.
- Fica em dúvida, ora achando que as quantidades continuam iguais, ora acreditando que a fila mais comprida tem mais elementos. Nessa etapa, muitas vezes encontramos crianças que contam as fichas das duas filas; porém, mesmo encontrando um número igual de fichas, continuam em dúvida (isso mostra que elas não confiam na contagem como instrumento de verificação de quantidades).
- Mostra-se muito segura de que as quantidades continuam iguais, mesmo que o entrevistador argumente sobre os comprimentos diferentes das filas — essa é a criança *conservadora* (neologismo usado por pesquisadores da área para se referir à criança que já conserva quantidades).

As crianças conservadoras costumam empregar certos argumentos, como: "Já estava igual; você não colocou nem tirou ficha, então continua igual" (raciocínio por identidade); ou "Se você apertar a fila de novo, fica do mesmo tamanho que antes" (raciocínio pela operação inversa); ou, ainda, "Esta fila está maior, mas uma ficha está bem longe da outra" (raciocínio por compensação).

Alguns professores acreditam que podem ensinar as crianças a tornar-se conservadoras, treinando-as nesse tipo de atividade, mas essa é uma tarefa impossível. Elas podem até dar respostas corretas em situações que já conheçam, mas continuarão apresentando dúvidas em qualquer situação diferente.

Todos nós chegamos ao conceito de número a partir dos variados tipos de relação que estabelecemos entre duas ou mais coleções de objetos. É, portanto, uma tarefa individual, que não depende de ensino direto.

Nesse sentido, qual é, então, a função da escola? Simplesmente esperar que as crianças mostrem já ter apreendido o conceito de número? Ou é possível ajudá-las nessa caminhada? Nesse caso, de que modo ajudar?

Um caminho apontado pelas pesquisas é colocar o aluno em contato com situações que o envolvam e estimulem a buscar soluções, estabelecer relações e realizar operações — como comparação de quantidades, classificação e seriação — que fundamentam o conceito de número.



COMPLEMENTAR

1. [A criança entra em um novo caminho]

Quando a criança chega à escola, já traz uma série de conhecimentos informais sobre a realidade. Na escola ela vai estabelecer uma nova relação cognitiva com o mundo.

O processo de educação escolar é qualitativamente diferente do processo de educação em sentido amplo. Na escola, a criança está diante de uma tarefa particular: entender as bases dos estudos científicos, ou seja, um sistema de concepções científicas.

Durante o processo de educação escolar, a criança parte de suas próprias generalizações e significados; na verdade, ela não sai de seus conceitos, mas, sim, entra num novo caminho acompanhada deles, entra no caminho da análise intelectual, da comparação, da unificação e do estabelecimento de relações lógicas. A criança raciocina, seguindo as explicações recebidas, e então reproduz operações lógicas, novas para ela, de transição de uma generalização para outras generalizações.

Os conceitos iniciais que foram construídos pela criança ao longo de sua vida no contexto de seu ambiente social (Vygotsky chamou esses conceitos de "diários" ou "espontâneos"; espontâneos na medida em que são formados independentemente de qualquer processo especialmente voltado para desenvolver seu controle) são agora deslocados para um novo processo, para uma nova relação cognitiva com o mundo, e assim nesse processo os conceitos da criança são transformados e sua estrutura muda.

Durante o desenvolvimento da consciência na criança o entendimento das bases de um sistema científico de conceitos assume agora a direção do processo.

(LEONTIEV, Alexis N. e LURIA, Alexander R. As idéias psicológicas de L. S. Vygotsky. In: VYGOTSKY, Lev S. *A formação social da mente.* 4. ed. São Paulo, Martins Fontes, 1991. Posfácio. p. 147.)

2. [Uma matemática ligada à vida]

Uma série de afirmações importantes a respeito do ensino podem ser feitas ao se estudar psicologicamente o desenvolvimento da inteligência matemática espontânea da criança pequena e do adolescente. Em primeiro lugar, quando os problemas são colocados sem que a criança perceba que é uma questão matemática [...] eles são solucionados pelos alunos com sua inteligência geral e não por quaisquer aptidões individuais.

Encontram-se freqüentemente alunos que, embora medíocres nas lições de aritmética, provam ter um espírito compreensivo ou mesmo inventivo quando são colocados problemas em relação a qualquer atividade que os interessa [que tenha significado].

Eles permanecem passivos e freqüentemente até mesmo bloqueados em situações escolares que consistem em resolver problemas abstratos (isto é, sem relação com qualquer necessidade real). Acima de tudo, eles se convencem de sua inadequação a respeito de tudo e desistem antes de começar, considerando-se intimamente derrotados. [...]

Todo aluno normal é capaz de bom raciocínio matemático se a atenção for dirigida a atividades de seu interesse. [...] Na maioria das lições *matemáticas* toda a diferença reside no fato de se pedir ao estudante que aceite de fora uma disciplina intelectual já totalmente organizada que ele pode ou não compreender.

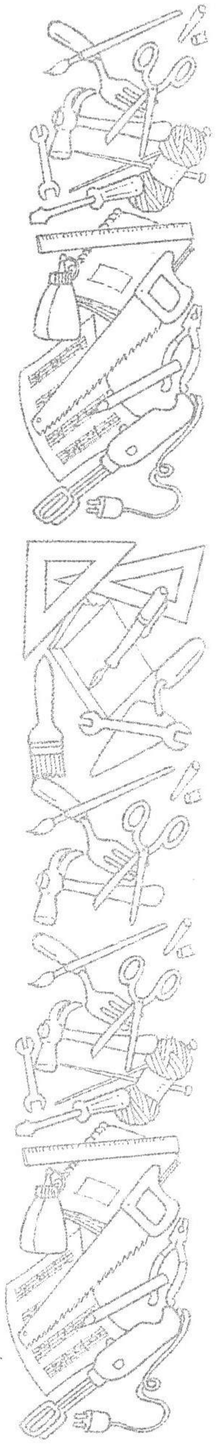
(PIAGET, Jean. Compreender é inventar. In: WADSWORTH, Barry. *Piaget para o professor da pré-escola e 1º grau.* 3. ed. São Paulo, Pioneira, 1989. p. 195-6.)



a) Discuta a afirmação de Piaget: "Só tem sentido estudar matemática se ela tiver um significado real para a criança".

b) "A criança constrói conceitos na escola ou fora dela." Comente essa frase à luz do texto de Leontiev e Luria.

Para você fazer



1. Muitas pessoas, ao ver crianças bem pequenas "recitando" a seqüência de números de 1 a 10 ou até 20, pensam que elas já sabem contar. Discuta essa idéia em grupo.

2. Selecione dois ou três livros de matemática da pré-escola e da 1ª série do Ensino Fundamental e analise o trabalho que eles propõem para que a criança chegue ao conceito de número. Observe se:
   a) ele leva os alunos a estabelecer relações entre os elementos de coleções dadas;
   b) cria situações desafiadoras que motivem os alunos a comparar quantidades;
   c) prioriza apenas a memorização dos signos relativos aos números.

3. A correspondência um a um é intuitiva e dispensa contagem. Você costuma utilizar essa forma de quantificação em seu cotidiano? Dê exemplos.

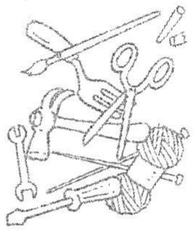
4. É importante que a criança, para construir o conceito de número, seja exposta a situações de comparação de quantidades. Pesquise em livros didáticos e entreviste professores de pré-escola para saber como esse trabalho é feito.

5. Realize com crianças de 5 a 7 anos as experiências descritas no capítulo a respeito de ordem, inclusão hierárquica e conexidade. Faça um levantamento das estratégias usadas pelas crianças de acordo com a faixa etária.

6. Imagine esta situação: uma criança da pré-escola conta e escreve todos os números até 20, mas não sabe responder se 7 é maior ou menor que 5 ou, ainda, qual é o resultado de 3 + 4. Em grupo, crie estratégias para avaliar que conceito de número essa criança tem.

7. Faça o teste da conservação de quantidades com crianças a partir de 3 anos: mostre-lhes uma fila com cerca de 8 objetos e peça-lhes que façam uma fila com "o mesmo tanto". Compare as ações das crianças com as descritas neste capítulo.

8. Escreva sobre os tipos de avaliação que você já fez ou pelos quais já passou como estudante:
   a) Permitiram que você se informasse sobre seu aproveitamento na disciplina?
   b) Funcionaram como um incentivo para seu crescimento?
   c) Facilitaram para você o exercício da auto-avaliação?



d) Ajudaram a corrigir o que era necessário em seus procedimentos?

e) Alguma vez um professor mostrou estar reavaliando e reorientando seu planejamento inicial de trabalho, como conseqüência do bom ou mau resultado obtido pela média da classe nas suas provas bimestrais ou mensais?

PARA SABER MAIS

BOYER, C. *História da matemática*. São Paulo, Edgard Blücher/Edusp, 1993.

CENTURIÓN, M. *Números e operações*. São Paulo, Scipione, 1994.

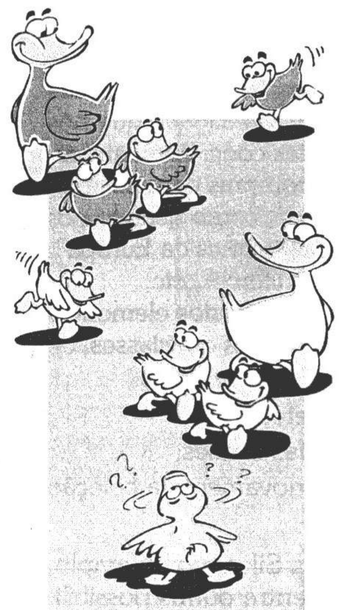
DANTZIG, T. *Número, a linguagem da ciência*. Rio de Janeiro, Zahar, 1970.

KAMII, C. *A criança e o número*. Campinas, Papirus, 1984.

KARLSON, P. *A magia dos números*. Campinas, Papirus, 1984.

PIAGET, J. e INHELDER, B. *O desenvolvimento das quantidades físicas na criança*. Rio de Janeiro, Zahar, 1975.

PIAGET, J. e SZEMINSKA, A. *A gênese do número na criança*. Rio de Janeiro, Zahar, 1975.



3

CLASSIFICAÇÃO

Lé com lé,
Cré com cré,
Homem com homem.
Mulher com mulher.

Folclore brasileiro

Imagine a seguinte situação: a família Silva (pai, mãe, um filho adolescente e uma filha pequena) comprou um móvel para colocar seu aparelho de som e os discos de todos. No momento de arrumar os discos, apareceram as seguintes possibilidades:

- separá-los em quatro pilhas, uma para cada pessoa;
- separá-los em duas pilhas, uma de música erudita e outra de música popular;
- formar várias pilhas, de acordo com o gênero de música (*jazz*, MPB, *rock*, samba, erudita, etc.).

Todas essas possibilidades demonstram uma preocupação com as semelhanças e diferenças entre os discos; as pilhas são organizadas a partir de alguma propriedade comum, de acordo com o critério escolhido. Podemos dizer que a família Silva terá de *classificar* os discos.

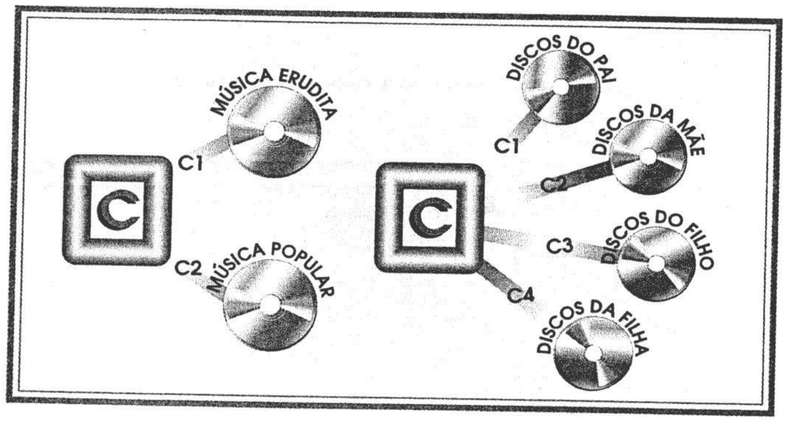
O que é classificação

Classificar é uma operação lógica de importância fundamental em nossa vida, pois nos ajuda a organizar a realidade que nos cerca. Estamos sempre classificando; às vezes concretamente, ao manipular materiais (como discos, roupas, compras de supermercado, etc.); outras vezes apenas mentalmente, como quando nos referimos aos "deputados da oposição", aos "países da Europa", às "palavras paroxítonas", aos "animais mamíferos", etc.

Consideramos que foi feita uma classificação dos elementos de uma coleção de objetos quando os separamos em classes, de tal modo que:

- cada classe tem pelo menos um objeto;
- cada objeto só pode estar em uma das classes;
- ao reunir todas as classes, obtemos novamente a coleção inicial.

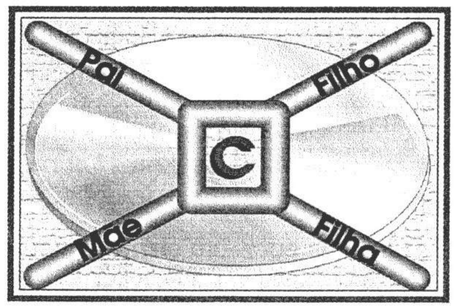
Com a coleção (C) dos discos da família Silva, por exemplo, podemos formar duas ou quatro classes, entre outras possibilidades.



Para classificar, trabalhamos com as relações de *pertinência* e de *inclusão de classes*.

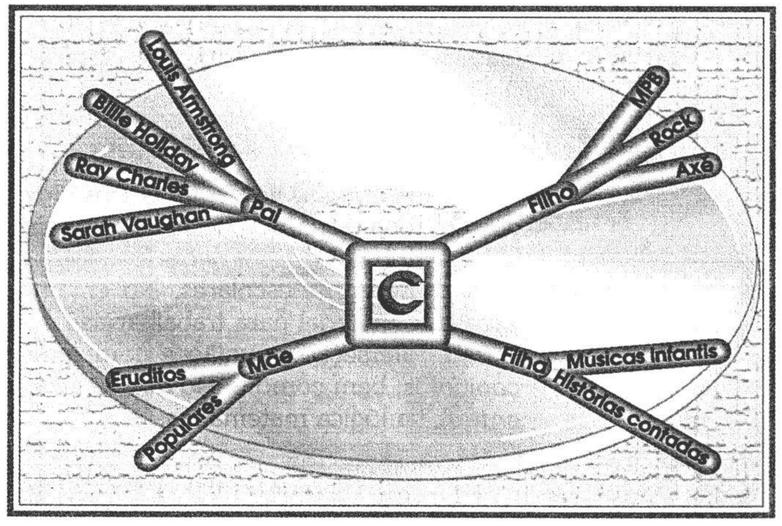
Quando relacionamos cada elemento com a classe à qual pertence (por ser semelhante aos outros elementos dessa classe), estamos estabelecendo uma relação de pertinência. Por exemplo: "Este disco fica na pilha dos discos de samba, porque ele é de samba; não pode ficar na outra pilha, porque lá só estão os de *jazz*, e ele não é de *jazz*".

Quando relacionamos uma subclasse com a classe maior em que ela se encaixa, estamos trabalhando com uma relação de inclusão de classes. Exemplo: "A coleção de discos de samba fica na pilha de discos de música popular, e não na pilha de música erudita". Assim, a inclusão estabelece uma relação entre a parte e o todo.



A classificação dos elementos de uma coleção pode ser representada por meio de um *diagrama de árvore*, que nos dá uma visão geral da "arrumação" feita com os elementos da coleção. A família Silva, por exemplo, poderia ter separado os discos em quatro pilhas iniciais, uma para cada proprietário.

Depois, cada proprietário separaria os próprios discos, segundo as características de sua coleção: os do pai são todos de *jazz*, e ele os juntaria por intérprete (Louis Armstrong, Billie Holiday, Ray Charles, Sarah Vaughan); a mãe separaria os seus em eruditos e populares; o filho, em MPB, *rock* e axé; os da filha, em músicas infantis e histórias contadas.



Ensinando classificação

O trabalho de classificação é iniciado ainda na pré-escola e retomado nas séries seguintes em níveis diferentes de abordagem. Essa recomendação, que serve para o planejamento de todo o trabalho com matemática na escola elementar, apóia-se no que Jerome Bruner (1974: 12) chama de *currículo em espiral*: "Dominar as idéias básicas, usá-las eficientemente, exige constante aprofundamento da compreensão que delas se tem, o que se pode conseguir aprendendo-se a utilizá-las em formas progressivamente mais complexas".

Estamos diante de um processo de elaboração e reelaboração por parte do estudante, desde a captação intuitiva das idéias básicas e sua aplicação a situações-problema até a utilização do pensamento lógico-dedutivo. Assim, torna-se possível uma progressiva formalização e sistematização do conhecimento enfocado.

Iniciamos o trabalho com classificação utilizando brinquedos, sucata, objetos escolares, ou blocos lógicos e outros materiais isomorfos* a eles. Desse modo, a criança irá se familiarizar com a observação dos atributos de cada peça e o levantamento das semelhanças e diferenças entre os objetos de uma coleção.

Com a continuidade das atividades, na 1ª e na 2ª série, os alunos chegarão aos poucos a algumas descobertas:

- relação de pertinência entre um elemento e uma coleção;
- estabelecimento de agrupamentos, de acordo com um critério;
- inclusão entre subcoleções pertencentes à mesma coleção;
- formação de classes.

A partir da 3ª série, a classificação poderá ser utilizada como "instrumento de trabalho" na construção de outros conceitos.

Com essa seqüência de estudos, o aluno já terá construído totalmente a operação de classificação por volta dos 11 anos de idade (PIAGET & INHELDER, 1975: 186).

Trabalhando com blocos lógicos

Na maioria das vezes, os blocos lógicos não são aproveitados em toda a sua potencialidade, servindo apenas para "ensinar" os atributos de suas peças (cor, forma, tamanho e espessura) para crianças pré-escolares. No entanto, eles constituem um excelente material para trabalhar as noções de pertinência, inclusão, interseção, reunião e complementação, da teoria dos conjuntos, bem como o uso dos conectivos lógicos (*e, ou, se... então*), da lógica matemática.

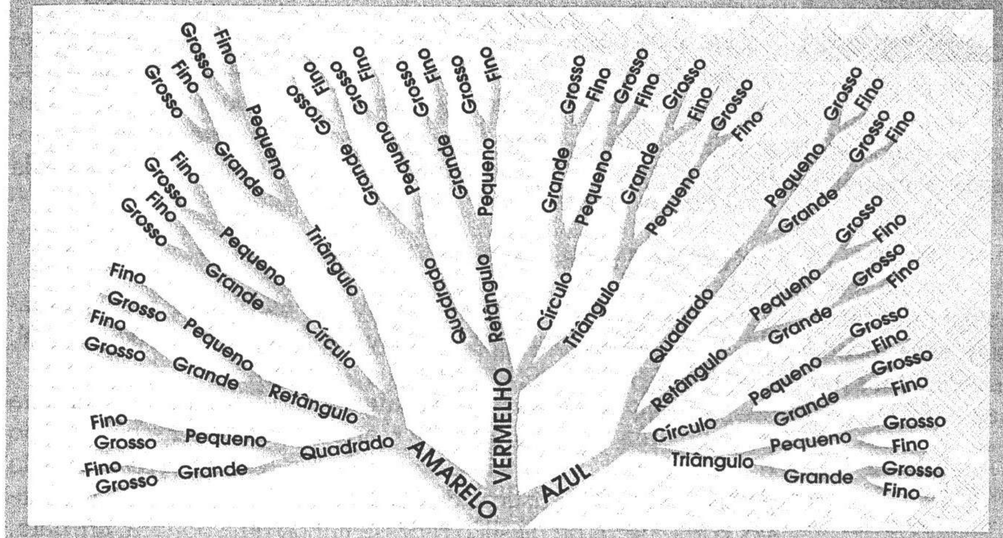
* Materiais isomorfos são aqueles que, embora de aspecto exterior bastante diferente, têm a mesma estrutura do material que lhes serviu de inspiração.

BLOCOS LÓGICOS

São coleções de peças, em geral de plástico, distribuídas da seguinte maneira, segundo seus atributos:

Atributos	Total de variações do atributo
Cor	3 (azul, vermelha, amarela)
Forma	4 (quadrada, retangular, triangular, circular)
Tamanho	2 (grande, pequena)
Espessura	2 (grossa, fina)

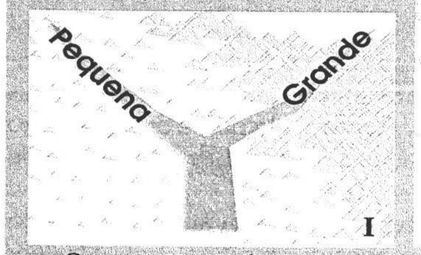
O total de peças é, então, 48, ou seja: $3 \times 4 \times 2 \times 2$. Veja no diagrama de árvore:



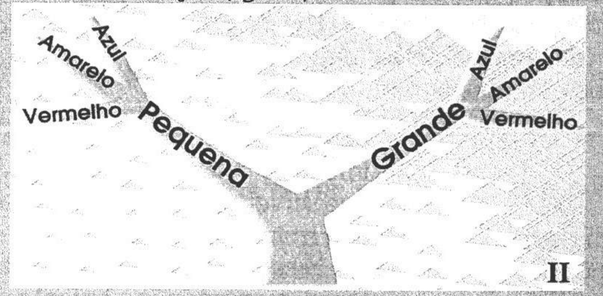
Como podemos ver, há uma *simetria* entre as várias subcoleções formadas. Por exemplo, as peças azuis podem ser retângulos, quadrados, triângulos *ou* círculos; cada uma delas pode ser grande *ou* pequena; um triângulo azul *e* grande pode ser fino *ou* grosso. No grupo das peças vermelhas, acontece o mesmo; elas podem ser retângulos, quadrados, triângulos *ou* círculos; cada uma delas pode ser grande *ou* pequena; um triângulo vermelho *e* grande pode ser fino *ou* grosso.

É claro que o diagrama que sugerimos para os blocos lógicos não é único: podemos formar os grupos de outro modo, obtendo um diagrama de árvore diferente desse. Por exemplo: comece separando as peças em dois grupos, as grandes e as pequenas. Seu novo diagrama se iniciará pela figura I.

A seguir, continue a separação desses dois subgrupos, formando, em cada um deles, três grupos, segundo a cor. Temos, agora, $2 \times 3 = 6$ novas subcoleções (figura II).



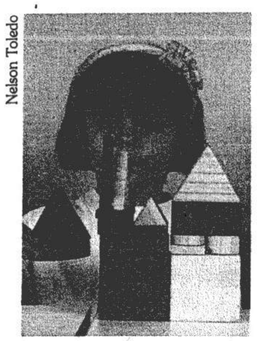
I



II

Continue separando as peças como preferir, fazendo a representação em seu diagrama, até obter apenas uma peça no último ramo de cada galho da árvore.

Construindo conceitos


Nelson Toledo

Os blocos lógicos foram bastante usados e divulgados pelo professor Zoltan Paul Dienes. Ele os pesquisou, junto com vários outros materiais, no trabalho que realizou com crianças no Canadá, Austrália, Estados Unidos, Nova Guiné e Inglaterra.

Dienes sugere que sempre se deve iniciar a construção de um novo conceito a partir da utilização de materiais de apoio, seja na pré-escola, seja em séries mais avançadas, inclusive além da 5ª série — fase em que tradicionalmente os professores consideram que "não há mais necessidade de concretizações".

De suas pesquisas, Dienes concluiu que o processo de abstração, que leva à construção de conceitos em matemática, se dá em seis etapas diferentes, que ele chamou de *jogo livre*, *jogos com regras*, *jogos de isomorfismo*, *representação*, *descoberta de propriedades* e *generalização*. Vejamos a seguir cada uma dessas etapas.

Etapa 1: jogo livre

O aluno brinca livremente com o material que é apresentado, passando a conhecer suas características de modo pessoal, sem interferência do professor.

Com blocos lógicos, um material não-figurativo, a primeira ação de uma criança entre 4 e 6 anos costuma ser a construção de uma figura. Por meio desse trabalho, ela vai reconhecendo as diversas características de cada peça. Se o material é figurativo, como peças de plástico representando uma boneca, um gato, um fogãozinho, um carro, uma bicicleta, uma bolinha, etc., ela monta uma cena usando algumas das peças, como: a boneca, o fogão e o gato. ("A mamãe vai cozinhar e o gato fica perto, para ganhar comida.")

Outro aspecto importante é o fato de a criança ir percebendo a existência de limitações nas próprias peças do material, o que constitui um treino para aceitar as regras impostas em cada jogo. Por exemplo: "Eu queria fazer mais um vagão no meu trem, mas acabaram as rodinhas!".

Etapa 2: jogos com regras

Por meio de diálogos com a classe, o professor percebe quando as crianças já descobriram os atributos de cada peça, e também se estão preparadas para enfrentar algumas restrições impostas pelas regras do jogo. Certamente não é qualquer jogo que serve, mas aqueles planejados para conduzir à formação de determinado conceito.

Esses jogos devem variar bastante em sua apresentação externa, mantendo, no entanto, a mesma estrutura. Em se tratando da classificação, a estrutura dos jogos deve lidar com os atributos das peças e com suas semelhanças. Veja alguns exemplos.

Jogo 1. Uma criança escolhe uma peça da coleção. Outras são convidadas a tirar uma nova peça, "bem parecida com aquela". Ganha a criança que tirar a peça considerada pela classe como "a mais parecida de todas", ou seja, a que tiver a maior quantidade de atributos coincidentes com os da primeira peça retirada.

Jogo 2. A professora forma um par de peças, como "triangular, grande, fina, vermelha" e "triangular, pequena, fina, vermelha". A seguir, pede que cada criança forme outro par do mesmo tipo. É sempre a classe que decide se o par está bem formado ou não.

Jogo 3. A professora pede uma peça por negação do atributo. Por exemplo: "Quero uma peça que não seja grande" (ou "que não seja azul"). Naturalmente, haverá várias soluções para cada pedido, e os alunos decidem se a solução de cada colega é válida ou não.

Observe que até aqui utilizou-se mais o que Piaget chama de conhecimento físico, ou seja, o atributo pedido se encontra na própria peça. O jogo de negação envolve conhecimento lógico-matemático, pois quando uma criança deve pegar uma peça não-azul e apanha uma vermelha, o que essa peça lhe mostra é a qualidade de "ser vermelha". A qualidade "não-azul" *não está* na peça, mas na relação que a criança estabeleceu.

Jogo 4. Trenzinho: uma criança escolhe a peça que vai ser o primeiro vagão do trem. O próximo jogador deve colocar o segundo vagão, que terá apenas uma diferença em relação ao primeiro. O terceiro vagão, a ser colocado pelo jogador seguinte, apresentará também uma única diferença quanto ao segundo, e assim por diante.

OLHANDO MAIS DE PERTO

1. Em grupo, jogue o jogo 4. Introduza variações, modificando o número de diferenças entre cada vagão e seu sucessor:
   a) duas diferenças;
   b) três diferenças;
   c) quatro diferenças.
2. Discuta: o que acontecerá se forem pedidas cinco diferenças entre um vagão e seu sucessor?

Esse jogo é muito rico, pois cada jogada permite diversas possibilidades. Se a primeira peça for "quadrada, grande amarela e fina", a segunda poderá ser "redonda, grande, amarela e fina", ou "quadrada, pequena, amarela e fina", ou "quadrada, grande, azul e fina", etc. Novamente, a classe decidirá se a jogada de cada participante foi ou não correta.

Etapa 3: jogos isomorfos entre si

Uma criança pode participar das atividades e compreender as regras de cada jogo sem que tenha percebido as relações entre um e outro.

Somente quando começar a destacar a estrutura comum entre os jogos, desprezando os aspectos exteriores, que são diferentes

entre si, estará pronta para construir o conceito que se objetiva com esses jogos. A única maneira de a professora perceber que a criança atingiu esse estágio é ficar atenta aos comentários que, aos poucos, os alunos começam a fazer: "Olha, nesse jogo está acontecendo com o Pedro o mesmo que no jogo das peças, quando o triângulo 'grande e amarelo' podia ficar junto com as peças 'grandes' e junto com as peças 'amarelas'. O Pedro, como está 'de óculos e de boné', pode ficar na turma que usa óculos, mas também pode ficar na turma de boné".

De acordo com Dienes, para que a criança se aproprie de um conceito são necessárias situações diversificadas em que ela esteja exposta a jogos com a mesma estrutura. Vejamos alguns exemplos relacionados às etapas iniciais do trabalho com classificação.

Jogo 1. Pede-se a um aluno que saia da classe. A seguir, os demais separam-se em dois grupos, de modo que quem estiver em um deles não pode estar no outro (em geral, em classes mistas, a primeira idéia que ocorre é "meninas de um lado e meninos do outro"). O aluno que estava fora da classe retorna, examina os grupos e decide em qual entrar.

Conforme vão estabelecendo critérios para formar os dois grupos, os alunos começam a perceber que a regra escolhida deve ter duas características:

- permitir que todos os alunos possam se colocar em um ou no outro grupo;
- não permitir que o mesmo aluno fique nos dois grupos.

Às vezes, eles escolhem critérios como: "De um lado, quem está de tênis; do outro, quem está de sandálias havaianas". Logo aparece alguém reclamando: "Eu estou de sapatos; então, não posso ficar em nenhum grupo!". Ou, ainda: "De um lado, quem está de uniforme; do outro, quem está de óculos". Alguém reclama: "Eu estou de óculos e de uniforme. Onde é que eu fico?".

Todas essas dificuldades devem ser discutidas pelos próprios alunos, que começam a perceber o erro na escolha do critério e o corrigem normalmente, sem a preocupação com "nota baixa" em caso de erro, que tanto prejudica o desempenho das crianças em sala de aula.

Jogo 2. Com as peças de blocos lógicos, formar duas coleções (que não precisam ter quantidades iguais de peças), de modo que cada peça só possa ficar em uma delas. Também se pode trabalhar com três ou mais coleções.

Nesse jogo, é muito interessante que, depois de feitas as separações, o professor apresente uma nova peça (por exemplo, um triângulo feito em cartolina verde) e peça que os alunos a coloquem numa das coleções. A solução do novo problema mostra se o grupo está seguro sobre o critério de separação estabelecido.

Algumas crianças, nesse momento, fazem comentários como: "Esse jogo é parecido com aquele em que um aluno saía da classe para a gente formar os grupos". Isso mostra o nível mais alto de abstração em que elas se encontram, estabelecendo relações entre jogos diferentes.

ETAPA 4: REPRESENTAÇÃO

No momento em que estabelece relações entre os jogos, o aluno já tem condições de começar a representar — com suas palavras, por meio de um desenho, de um esquema ou de um diagrama — aquilo que percebeu. Somente nessa ocasião o professor poderá representar de maneira mais sistematizada o conceito que está sendo trabalhado a partir dos jogos.

A representação de um pensamento é tarefa difícil e demanda muito tempo. Professores de cursos pré-escolares podem observar que muitas vezes a criança realiza corretamente uma tarefa mas, quando se pede a ela uma explicação, responde: "É assim que se faz" ou "Fiz assim porque gosto". Do mesmo modo, em séries mais avançadas há crianças que resolvem um problema "de cabeça" e não sabem indicar de modo formal o raciocínio que fizeram. Podemos, então, avaliar a grande dificuldade encontrada pelos alunos que são precocemente obrigados a escrever a "sentença matemática" de cada problema que lhes é proposto!

Muitas vezes, os professores de matemática — e mesmo os livros didáticos — iniciam uma nova unidade pela etapa da representação: em primeiro lugar, vem a definição (representação formal do conceito); depois, alguns exemplos; a seguir, situações práticas em que se pode aplicar aquele conceito. Esse, acreditamos, é um dos grandes motivos pelos quais os alunos — mesmo os de cursos do nível médio — acham que matemática é uma disciplina em que se devem decorar algumas regras e aplicá-las em situações de sala de aula, e que nada tem a ver com a vida prática.

Para incentivar a representação e, em especial, a verbalização do que está sendo abordado, o professor pode fazer alguns jogos com crianças das séries iniciais.

Jogo 1. O professor retira uma peça da coleção e pergunta a um aluno como é a peça. Suponhamos que a criança responda: "É uma roda". O professor poderá escolher outra peça redonda, do mesmo tamanho da anterior, porém de cor diferente, fazendo a mesma pergunta. Se o aluno responder que "Também é uma roda", o professor poderá perguntar: "Então as duas são iguais?". Assim, a criança irá observar que a peça inicial não se caracterizava apenas pela forma e que outros atributos, como a cor, também podem ser observados.

Jogo 2. As peças são colocadas em uma sacola. Cada aluno apanha uma e, sem retirá-la da sacola, tenta descrevê-la pelo tato, da melhor maneira que puder. A seguir, retira a peça para que seus colegas confiram se a descrição foi adequada.

Etapa 5: descoberta de propriedades

A partir da construção inicial de um conceito, é possível começar a descobrir propriedades e estabelecer relações, aprofundando o conhecimento. Quando vamos pela primeira vez a um endereço desconhecido, por exemplo, costumamos seguir exatamente as indicações recebidas. Mas depois de termos conseguido localizar esse ponto no bairro, e nos familiarizamos com ele em relação a pontos de referência, passamos a ter uma representação mental do lugar, uma "planta" das imediações; descobrimos novas maneiras de atingir o local, evitando ruas de muito trânsito e cortando caminhos, por exemplo.

Do mesmo modo, à medida que estabelece relações entre os jogos, o aluno vai percebendo o que é importante ou não em um jogo, quais as melhores estratégias a utilizar, etc.

Etapa 6: generalização

A última etapa na construção de um conceito é aquela em que se pode generalizá-lo, ou seja, utilizá-lo em situações novas.

No caso do conceito de classe, por exemplo, quando as crianças demonstram já ter construído essa idéia, a partir de todos os jogos propostos, o professor poderá sugerir outras atividades: organizar um "mercadinho", uma "farmácia", uma "loja", etc., com embalagens iguais; organizar um armário de materiais escolares, ou uma minibiblioteca da classe; arrumar os blocos lógicos segundo diferentes critérios; separar a classe em equipes e organizar jogos para uma gincana.

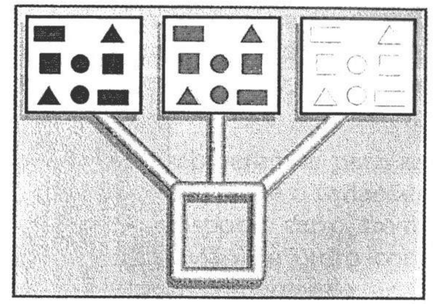
Todas essas atividades constituem excelente oportunidade para troca de opiniões e de experiências entre os alunos. Examinando os critérios de cada grupo, eles podem perceber diferenças de estratégia e escolher a mais adequada a uma dada situação. Desse modo, estarão vivenciando, em circunstâncias bem informais, a avaliação (e a auto-avaliação).

Materiais isomorfos aos blocos lógicos

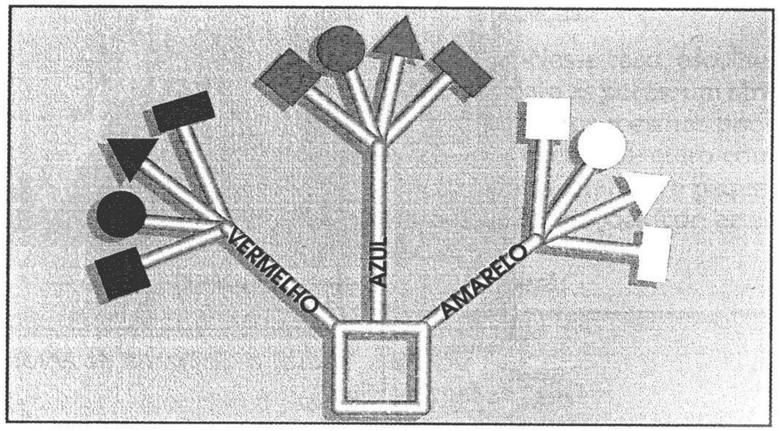
Já dissemos que o trabalho com jogos deve se estender ao longo do tempo e não pode ficar restrito aos blocos lógicos como único material de apoio. Veremos aqui como construir outros materiais semelhantes; para isso, a análise dos blocos lógicos no diagrama de árvore poderá ser-nos muito útil.

Como vimos, nos blocos lógicos há sempre uma simetria entre as diversas subcoleções obtidas, ou seja, encontraremos sempre as mesmas características nos componentes de cada nova classe que for sendo construída. Assim, verificamos que:

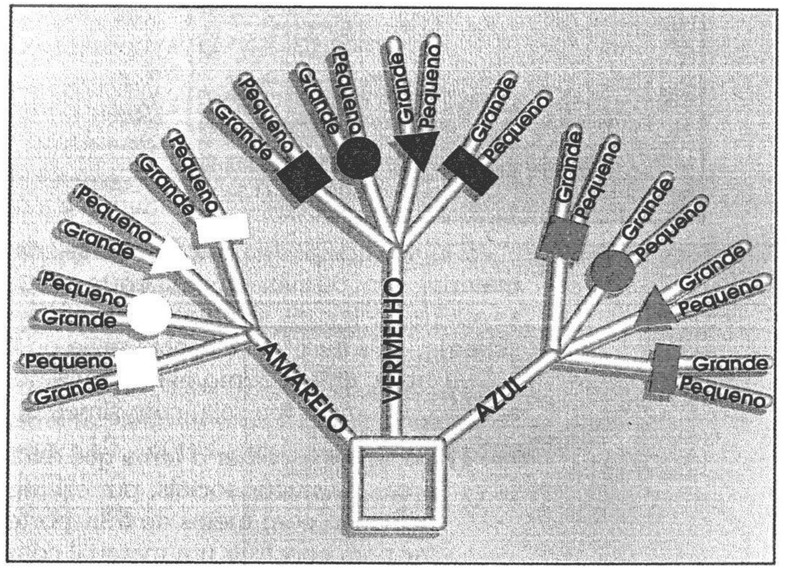
- Podemos iniciar a separação das peças diferenciando-as, por exemplo, pela cor (vermelhas, azuis, amarelas). Teremos, então, três coleções:



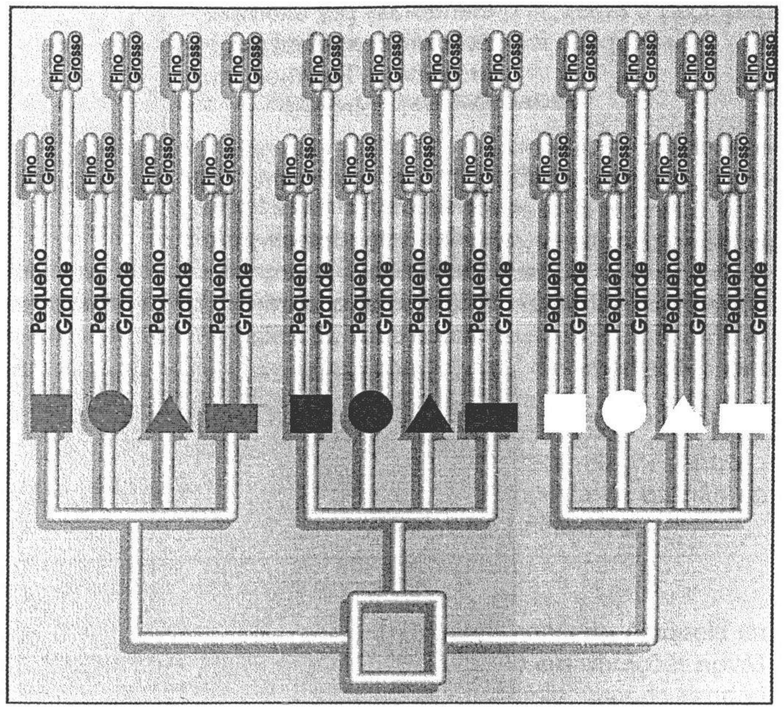
- Se separamos pela forma cada uma dessas coleções iniciais, aparecem em cada uma delas 4 novos subgrupos (triângulos, quadrados, retângulos, círculos), de modo que ficamos com 12 coleções ao todo (ou 3×4):



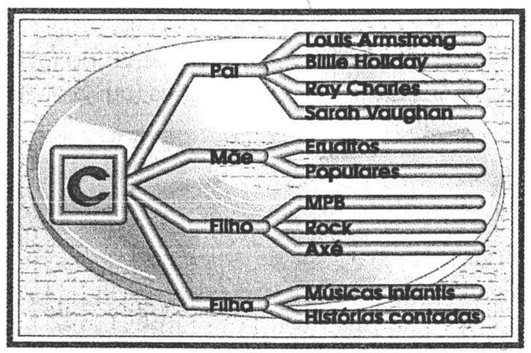
- Se quisermos agora separar as peças por tamanho (grandes e pequenas), obteremos 24 novas subcoleções (ou $3 \times 4 \times 2$).



- Finalmente, separando pela espessura (grossas e finas), obteremos 48 peças individuais (ou $3 \times 4 \times 2 \times 2$).



Vejamos, agora, o diagrama de árvore feito para os discos da família Silva.



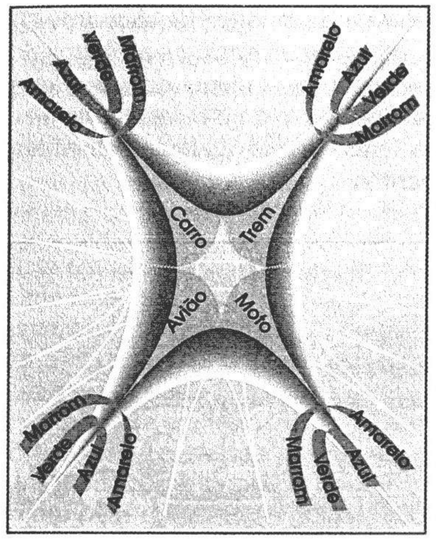
Percebe-se que não há simetria entre os quatro subgrupos iniciais, pois cada um tem peças com características bem específicas. Não podemos obter por multiplicação o total das subcoleções formadas, pois elas não possuem quantidades iguais de elementos (a coleção do pai tem 4 subgrupos, a da mãe tem 2, a do filho tem 3 e a da filha tem 2).

É lógico que podemos oferecer às crianças qualquer tipo de material, com ou sem simetria entre os subgrupos. Porém, para as atividades iniciais são mais aconselháveis os que apresentam simetria, pois facilitam a organização do trabalho dos alunos.

Vejamos, então, como planejar um novo material, isomorfo aos blocos lógicos (ou seja, com simetria):

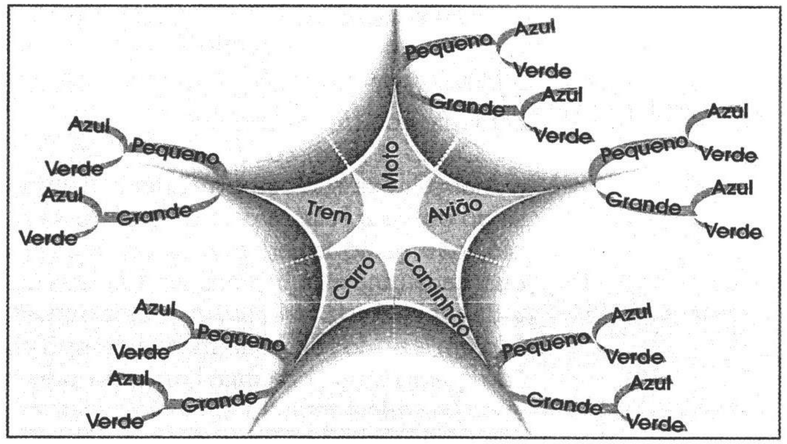
1) podemos escolher o tema que dará origem às peças. Na área de estudos sociais, por exemplo, se estivermos trabalhando com meios de transporte poderemos aproveitar para construir um material com esse tema.

2) definimos quantas peças terá o nosso jogo. Supondo que desejamos um jogo com 20 peças, teremos de pensar numa multiplicação com produto igual a 20, o que nos deixa algumas opções:

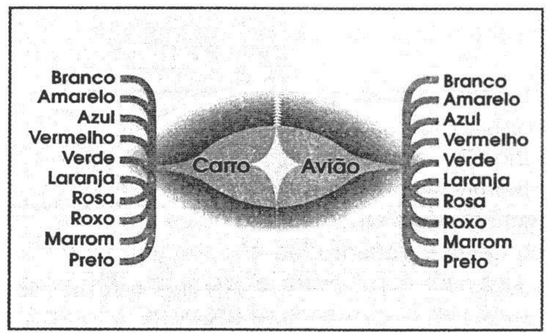


- *Opção 5 × 4.* Escolheremos para as peças um atributo que tenha 5 variações (como o tipo de transporte: carro, trem, caminhão, moto, avião); e outro com 4 variações (como a cor: amarelo, azul. verde, marrom). Assim, ficaremos com 4 carros (amarelo, azul, verde, marrom), 4 trens (nas mesmas cores), 4 caminhões (idem), 4 motos (idem) e 4 aviões (idem), totalizando as 20 peças.
- *Opção 5 × 2 × 2.* Nesse caso, escolheremos 3 atributos para as peças: um atributo com 5 variações (os mesmos tipos de transporte, por exemplo); outro com 2 variações (tamanho: grandes e pequenos); e outro com 2 variações (cor: azuis e vermelhos).

O diagrama de árvore desse material será:



- *Opção 2 × 10.* Escolhemos, por exemplo, 2 tipos de transporte (carro e avião), cada um em 10 cores (amarelo, azul, verde, etc.).



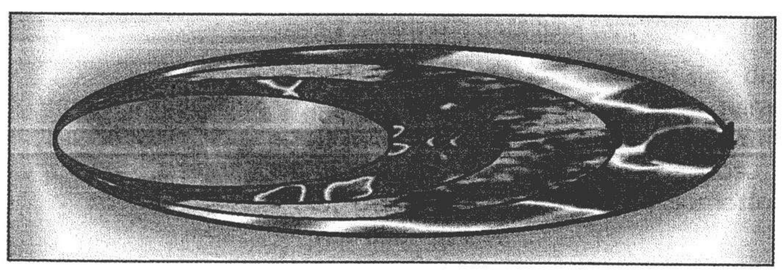
A classificação e o conceito de número

Desde que já consigam trabalhar bem com as semelhanças entre os elementos de conjuntos (aspecto qualitativo), os alunos estarão prontos para descobrir semelhanças entre os próprios conjuntos, no que se refere à quantidade de elementos (mesmo que não haja nenhuma semelhança entre os atributos dos objetos considerados). Assim, entre um conjunto de 3 bicicletas, outro de 3 gatos, outro de 3 dedos, outro de 3 balas, existe de comum a propriedade numérica "três", e não qualquer semelhança qualitativa entre seus elementos.



Portanto, o número 3 é a classe constituída por todos os conjuntos de três elementos.

Como já foi discutido, para construir o conceito de número a criança necessita compreender a inclusão hierárquica. A "classe do dois", a "classe do três", a "classe do quatro", por exemplo, não estão isoladas, mas pertencem a uma hierarquia na qual cada uma está incluída em todas as que estão acima e inclui todas as que estão abaixo (a "classe do três" inclui a "do dois", a "do um", a "do zero", ao mesmo tempo em que está incluída na "do quatro", na "do cinco", e assim por diante).



(KAMII, C. *A criança e o número*. Campinas, Papirus, 1994.)

Ao nos referirmos a uma hierarquia de classes, já estamos entrando na *seriação*.



COMPLEMENTAR

1. [Erro construtivo]

Lino de Macedo, conhecido estudioso brasileiro das idéias de Piaget, diz que o erro, como oposição ao acerto, deve ser revisto ou interpretado de outro modo. Para Piaget, a questão é, acima de tudo, de invenção e de descoberta e não necessariamente de acerto ou erro. Aquilo que é errado em um contexto, pode estar certo em outro. Erro e acerto são sempre relativos a um problema ou sistema.

O construtivismo defende que as estruturas, os esquemas, os conceitos, as idéias, são criados, construídos, por um processo de auto-regulação. [...] Para aprender, por exemplo, a ficar em pé, a criança terá que descobrir uma postura correta. No início, ela não sabe como fazer isso: as pernas ficam muito abertas, ou muito fechadas; o corpo muito para frente, ou muito para trás. [...] Se a criança está indo muito para a frente, ela precisa aprender a vir um pouco pra trás; se está indo muito para um lado, precisa inclinar-se um pouco para o outro, etc. Regulação refere-se, pois, a aspectos do processo, corrigidos ou mantidos, tendo-se em vista os resultados que se quer alcançar. [...]

Como, então, transformar o erro em uma situação observável para o aluno? [...]

De um modo geral, toda a parte experimental da teoria de Piaget pode ser reduzida ao seu esforço para classificar e ordenar em níveis de desenvolvimento as respostas das crianças.

O nível I corresponde àquele em que a criança não resolve o problema ou mesmo sequer o entende. O nível II é o do conflito, ambivalência, dúvida ou flutuação. É o nível intermediário, no qual a criança oscila em suas respostas. O nível III corresponde àquele em que a criança apresenta uma solução suficiente para a questão proposta. Obviamente, o que é nível III em um sistema, equivale a um nível II ou I no que lhe é imediatamente superior em termos de complexidade.

(MACEDO, Lino de. *Ensaios construtivistas*. 2. ed. São Paulo, Casa do Psicólogo, 1994. p. 69-73.)

2. [A riqueza da matemática de todo dia]

Em entrevista à revista *Nova Escola*, a pesquisadora Liliana Tolchinsky defende que os alunos aproveitem melhor a convivência diária com os números.

NE: *O que seriam textos sociais na matemática?*

LT: São textos que misturam números e nomes e têm uso comum e objetivo no dia-a-dia. Tabelas, gráficos, listas com muitas cifras, notas de compras em que aparecem contas enormes e detalhadas são textos matemáticos riquíssimos. Mas, apesar de sua utilidade no ensino, são praticamente deixados de lado, pois a maioria das escolas inicia o ensino da disciplina pelos números e contas pequenas, pelo 1, 2, 3, 4, 5. [...]

NE: *A senhora propõe que a escola aproveite a experiência do dia-a-dia das crianças?*

LT: Sim, isso já acontece no ensino da língua. Estou certa de que os conhecimentos extra-escolares têm um papel estratégico para fundamentar o edifício do conhecimento matemático. Esses conhecimentos vão contribuir seguramente para o desenvolvimento da disciplina. Apesar disso, em vários países da Europa estão praticamente ausentes das escolas. Na prática, não se trabalha com números grandes até pelo menos a segunda série. Ninguém pede a uma criança que escreva 1 598, por exemplo, mesmo que esse seja o número de sua casa, porque é um número grande. É preciso mudar esse estado de coisas.

NE: *Qual é sua sugestão?*

LT: Recomendo aos professores que, ao contrário do que acontece hoje, multipliquemos as situações em que a criança se defronta com os números mais diferentes, mesmo que ela ainda não saiba, por exemplo, a diferença entre um número que registra quantidades e outro que indica um endereço. Para que os alunos descubram como funcionam os vários sistemas de notação numérica, e possam operar com eles, devem poder compará-los. Devem usá-los em várias situações, sem graduações artificiais impostas pela idéia dos adultos sobre o que é mais fácil ou mais difícil. [...]

NE: *Como se chegou a essa situação?*

LT: Na década de 80, a psicologia procurou aprofundar os estudos sobre o desenvolvimento da noção de número. Foi uma época de muitos debates e experiências, na qual piagetianos, neopiagetianos e cognitivistas se digladiaram, discutindo os passos da construção dessa noção e das operações aritméticas fundamentais, a adição e a subtração. Esse debate, porém, acabou por se restringir aos aspectos teóricos, por influência dos piagetianos.

NE: *E então?*

LT: Os piagetianos acham que as operações de classificação e seriação e as ações de correspondência e interação se sintetizam na noção de número. Para eles, essas operações e as ações correspondentes são necessárias para a construção do conceito de número. Em conseqüência, exercícios de classificação, seriação, correspondência e interação se converteram nas atividades preferidas das escolas. Foram entendidas como preparatórias para a compreensão do número.

NE: *Como está a situação agora?*

LT: Recentemente, ganhou força a posição de outras correntes teóricas (neopiagetianas e cognitivistas), que defendem outras atividades preparatórias para o desenvolvimento da noção de número, com o uso de jogos do tipo dominó. Esses jogos facilitam a correspondência entre determinadas quantidades e seus símbolos gráficos, os números. Muitas dessas propostas confluíram e hoje os construtivistas sustentam que a construção dos números naturais pode ocorrer com o uso de exercícios, como contar em voz alta, compor e decompor números grandes. Também podem ser usadas diversas linguagens. As pedras de dominó representam números. Brincar com elas pode ser divertido e esclarecedor.

(*Nova Escola*, São Paulo, Abril, ano X, 87, 56-7, set. 1995.)

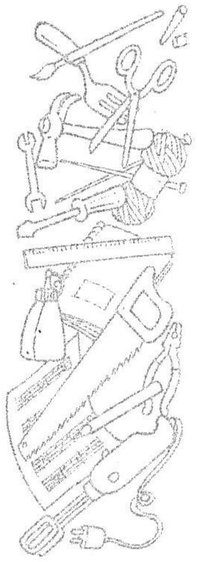
Sobre os textos

a) Observe um grupo de crianças em uma situação de jogo e veja como elas resolvem as situações em que incorrem em erro. Com base no texto de Lino de Macedo elabore um relatório sobre o que você observou.

b) Na perspectiva do adulto, o erro deve ser corrigido ou punido. Por isso, numa situação de prova escolar, por exemplo, o importante é *o que* a criança errou, e não *por que* e *como* ela errou. Como, então, considerar o desenvolvimento do aluno, o modo como ele constrói o conhecimento? Que sugestões você daria para "transformar o erro numa situação observável para o aluno"?

c) Entreviste alguns professores de matemática utilizando como roteiro as afirmações feitas por Liliana Tolchinsky. Observe se esses professores conhecem as atividades propostas por neopiagetianos e cognitivistas. Organize suas respostas confrontando as duas posições com o que se está fazendo na escola.

Para você fazer



1. Classifique as pessoas de sua sala de aula (estabeleça pelo menos três classes). Represente seu trabalho com um diagrama de árvore.
2. Comente: "A criança das séries iniciais do Ensino Fundamental deve começar a trabalhar com as questões de pertinência do elemento a um conjunto, inclusão entre conjuntos, reunião e interseção de conjuntos, construindo os conceitos que são fundamentais nessa teoria, mas sem usar a linguagem simbólica, antes tão enfatizada".
3. Utilizando quadrados de 6 cm × 6 cm em papel-cartão, construa um material isomorfo aos blocos lógicos, sobre o tema meios de transporte. Se desejar um material mais durável — para ser utilizado por mais tempo —, plastifique-o com papel *contact* transparente.
4. Planeje e construa um material isomorfo aos blocos lógicos com 30 peças, usando o tema que você preferir.

PARA SABER MAIS

CENTURIÓN, M. *Números e operações*. São Paulo, Scipione, 1994.

COORDENADORIA de Estudos e Normas Pedagógicas (Cenp). *Atividades matemáticas: ciclo básico*. São Paulo, Secretaria de Estado da Educação, 1993.

_____. *A criança e o conhecimento*. Projeto Ipê. São Paulo, Secretaria de Estado da Educação, 1990.

DIENES, Z. P. *As seis etapas do processo de aprendizagem em matemática*. São Paulo, Herder, 1972.

FUNDAÇÃO para o Desenvolvimento da Educação (FDE). *O jogo e a construção do conhecimento na pré-escola*. Série Idéias. n. 10. São Paulo, Secretaria de Estado da Educação, 1991.

MACHADO, N. J. *Lógica, é lógico!*. São Paulo, Scipione, 1989.

SEBER, M. da G. *A construção da inteligência pela criança*. São Paulo, Scipione, 1989.



4

SÉRIES E SEQÜÊNCIAS

Um elefante incomoda muita gente.
Dois elefantes incomodam, incomodam muito mais.
Três elefantes incomodam muita gente.
Quatro elefantes incomodam, incomodam,
incomodam, incomodam muito mais.
Cinco elefantes incomodam muita gente.
Seis elefantes...

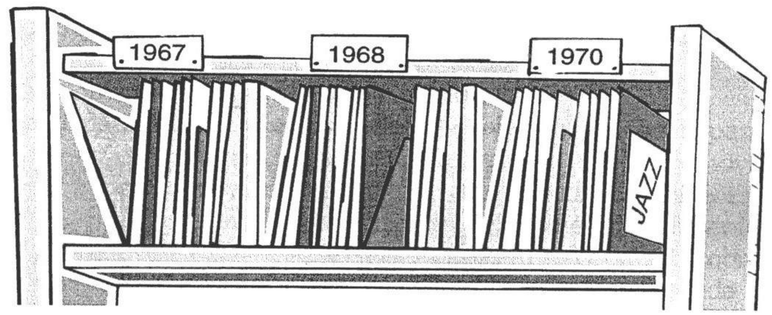
Folclore brasileiro

A lógica das diferenças

Para discutir a seriação, podemos retomar o exemplo dos discos (capítulo 3). Agora, o pai da família Silva é um fã incondicional do *jazz*. Ele tem uma enorme coleção de discos — e uma enorme dor de cabeça quando quer achar algum! Como poderíamos solucionar esse problema?

Certamente você está pensando em organizar os discos não pela semelhança, uma vez que todos são de *jazz*, mas por alguma diferença entre eles. Pode-se sugerir uma ordem, segundo algum critério, como nome do compositor ou do instrumentista, ordem alfabética, data de aquisição, ano da gravação, etc.

Trata-se, nesse caso, de uma *seriação*.



Nas tarefas relacionadas à organização da realidade, a seriação é uma operação lógica tão fundamental quanto a classificação. Enquanto a classificação enfatiza as semelhanças entre os elementos das coleções, a seriação trabalha mais com as diferenças entre eles.

Dizemos que estamos *seriando* os elementos de uma coleção quando estabelecemos entre eles uma relação de diferença *que possa ser quantificada*, permitindo que os elementos sejam colocados em *ordem crescente* ou *decrescente*. Assim, obtemos uma fila, na qual cada elemento tem seu lugar *bem definido*, e a relação que se estabelece entre ele e seus antecessores e sucessores tem as propriedades *recíproca* (ou anti-simétrica) e *transitiva*.

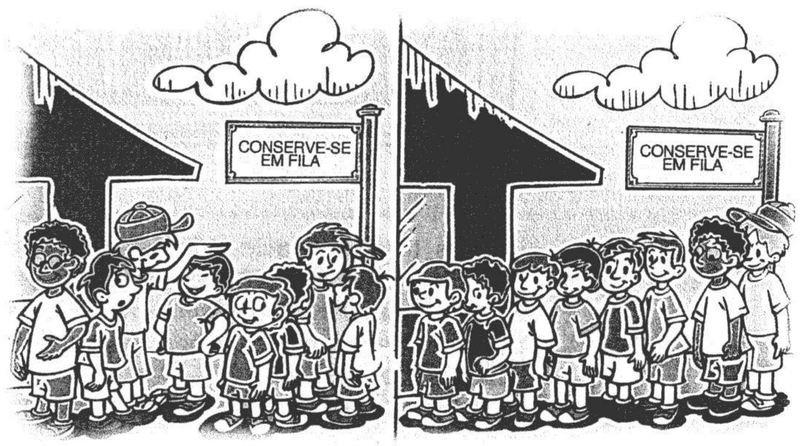
Propriedade recíproca ou anti-simétrica

Cada elemento de uma série se compara com seu antecessor (ou seu sucessor) de tal forma que, se invertermos a ordem da fila, a ordem de comparação também se inverterá. No exemplo dos discos, se os colocarmos em ordem crescente por data de aquisição, poderemos dizer que "o segundo é *mais antigo* que o terceiro", assim como poderemos dizer que "o terceiro é *mais novo* que o segundo".

Podemos estabelecer diversas relações entre os elementos de uma coleção. Nem todas, porém, apresentam a propriedade recíproca ou anti-simétrica. Por exemplo: vamos fazer uma fila com "os filhos do casal Costa" (Ana, Paulo, Lídia, Ivo e José). Se considerarmos, entre eles, a relação "ser irmão", diremos que "Ivo é irmão de José", e se invertermos a ordem a relação continuará a mesma: "José é irmão de Ivo". Portanto, a relação "ser irmão" tem propriedade *simétrica*, ou seja, mantém-se mesmo quando invertemos a ordem dos elementos.

Se tivéssemos organizado os irmãos em fila por altura, a relação escolhida ("ser mais alto") teria a propriedade anti-simétrica (Ivo é *mais alto* que José e José é *mais baixo* que Ivo).

A observação permite-nos afirmar que crianças por volta dos 5 ou 6 anos ainda não dominam essa propriedade das séries. Se, por exemplo, sugerimos a um grupo de crianças que se coloque "em fila por tamanho, começando da menor até a maior", depois de algum tempo de discussão e várias tentativas, em que elas se medem duas a duas, conseguirão organizar a fila.



Entretanto, quando pedimos que façam uma nova fila, agora do maior para o menor, as crianças não se dão conta de que basta inverter a ordem da fila (se a 1ª é *menor* que a 2ª, esta é *maior* que a 1ª). E desmancham tudo, recomeçando a medir todas, duas a duas.

Transitividade

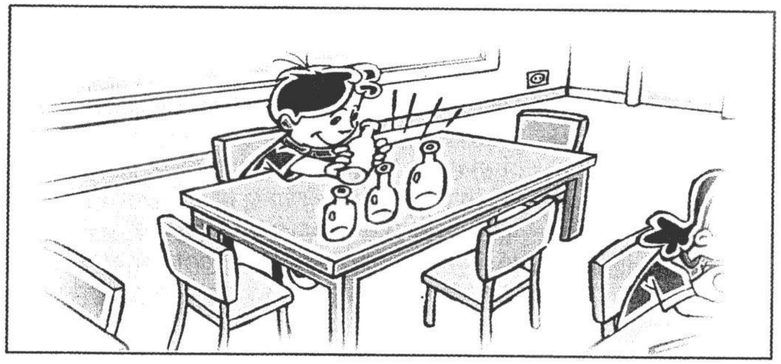
Há tipos de relações entre elementos de um conjunto em que, estabelecendo a relação entre o primeiro deles e o segundo, e depois entre o segundo e o terceiro, imediatamente podemos concluir qual é a relação entre o primeiro e o terceiro. No exemplo dos filhos do casal Costa, se soubermos que Paulo é mais alto que Ivo e Ivo é mais alto que José, descobrimos facilmente quem é o mais alto dos irmãos. Assim, voltando ao caso dos discos em ordem crescente por data de aquisição, se "o

primeiro disco é mais antigo que o segundo e este é mais antigo que o terceiro", não precisamos de grande esforço de raciocínio para deduzir que "o primeiro é mais antigo que o terceiro".

Novamente, a observação do modo como a criança age em uma situação ligada à seriação mostra-nos se ela já domina ou não a transitividade de uma relação. Se lhe dermos certa quantidade de barrinhas de tamanhos diferentes, pedindo-lhe que "forme uma fila da menor para a maior", podem surgir diferentes reações, variando entre dois extremos:

a) Ela pega duas barras quaisquer e as compara, colocando a menor antes da maior; a seguir, pega uma nova barra qualquer e a compara com cada uma das duas já arrumadas, continuando esse processo até o fim. Isso mostra que ela não construiu ainda a propriedade transitiva da relação "maior que" ou "menor que".

b) Ela reúne as barras, escolhendo a menor de todas, para ser colocada em primeiro lugar; a seguir, escolhe de novo a menor de todas entre as que restaram para colocá-la em segundo lugar, continuando com o mesmo procedimento até o fim. Essa ação da criança mostra seu domínio sobre a transitividade (se a primeira é menor que a segunda e esta é menor que a terceira, então a primeira é menor que a terceira).





Ensinando seriação

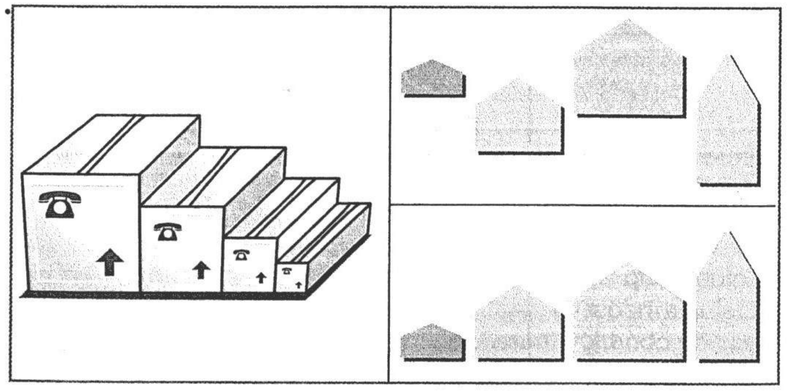
No que se refere ao planejamento de atividades, valem para a seriação todas as observações feitas para a classificação. O trabalho é iniciado na pré-escola, em atividades de familiarização com o conceito, e se desenvolve em um "currículo em espiral", até sua sistematização.

As primeiras atividades utilizam materiais de encaixe: panelinhas, potinhos, caixas, etc., que cabem um dentro do outro. Convém oferecer no máximo cinco ou seis objetos nessas atividades iniciais e propor apenas experiências de encaixe simples, variando bastante os materiais utilizados.

Em níveis mais avançados, é sempre interessante oferecer situações-problema que diversifiquem a atividade. Por exemplo:

- Pedir aos alunos que guardem todas as panelinhas em um "armário", uma caixa na qual o professor sabe que não há um lugar para cada panelinha; desse modo, eles tentarão acomodar as panelinhas umas dentro das outras.
- Formar grupos e fornecer aos alunos várias caixinhas de tamanhos diferentes e uma caixa de sapatos com tampa. A tarefa consiste em guardar as caixinhas na caixa de sapatos e depois fechá-la com a tampa; ao final, vê-se qual grupo acomodou a maior quantidade de caixinhas.

A seriação pode ser utilizada também na construção de "escadas", inicialmente com material tridimensional: caixas fechadas, roletes cortados de cabo de vassoura em tamanhos variados, latas de alimentos vazias, etc. Numa fase mais adiantada, usam-se materiais bidimensionais: figuras de casas, bonecos, bichos ou figuras recortadas em cartolina ou papel-cartão. Nesse caso, as peças não têm um apoio natural, como os objetos tridimensionais (o chão, a mesa, o local plano onde está sendo realizada a atividade), por isso o aluno primeiro precisa descobrir que as bases de todas as peças devem estar alinhadas, o que não é fácil. A princípio, ele usa como referência apenas a parte superior da peça. Ainda saindo da fase do egocentrismo, a criança tem dificuldades em considerar mais que uma das variáveis.



EU SOU O CENTRO DO UNIVERSO

Na fase que Piaget denomina *egocentrismo* (entre 2 e 4 anos de idade, aproximadamente), a criança apresenta as características que se seguem.

- Quando observa a realidade ao redor, seu pensamento centra-se em determinado item que ela privilegiou naquele momento; é incapaz de observar outro simultaneamente. Assim, para fazer uma "escadinha" com algumas réguas, por exemplo, a criança observa a parte superior de cada uma, a fim de procurar a mais alta, ignorando totalmente a parte inferior.
- Ao examinar um objeto, a criança não consegue perceber que ele pode apresentar aspectos diferentes, conforme o ângulo de visão.
- Ao se localizar espacialmente, o único referencial da criança é seu próprio corpo. Ela não compreende que algo esteja *à frente da mesa*, mas apenas à *sua* frente.
- Quanto ao aspecto social, verifica-se que crianças de 2 ou 3 anos, quando colocadas próximas umas das outras, não conseguem brincar juntas: uma é incapaz de se colocar no lugar da outra para compreender suas preferências. Isso explica por que aos 5 ou 6 anos as crianças ainda sentem dificuldade ao discutir suas opiniões.

Aos poucos, a criança vai se "descentrando", ou seja, começa a coordenar as diversas centrações, construindo um sistema de relações entre elas.

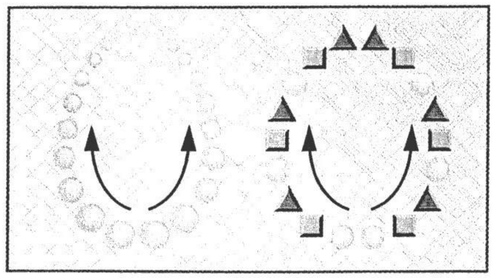
A seriação e o conceito de número

Em relação aos números, podemos dizer que a *série numérica* é o resultado da seriação de classes de conjuntos. Portanto, se considerarmos a ordem crescente de quantidade de elementos, qualquer conjunto de 3 elementos que imaginarmos estará colocado depois de qualquer conjunto de 2 elementos e antes de qualquer conjunto de 4 elementos (a "classe do 3" estará depois da "classe do 2" e antes da "classe do 4") — veja figura à p. 42. A relação entre a primeira classe e a segunda, ou entre a segunda e a terceira, é "+ 1" ("tem mais uma unidade que a anterior"). No caso da ordem decrescente, seria "– 1" ("tem menos uma unidade que a anterior").

As seqüências

Para se organizar uma fila com os elementos de uma coleção, pode-se utilizar a *seqüência*, que considera as diferenças de natureza qualitativa e não permite, portanto, ordenação crescente ou decrescente.

Vejamos, por exemplo, como uma criança pode montar colares usando peças de formatos e tamanhos diferentes. Há duas caixas de peças. Na caixa grande, todas as peças são redondas mas de tamanhos diferentes, sendo duas de cada tamanho. Na caixa menor, há peças de vários formatos (círculos, cubos, pirâmides), sendo as de mesmo formato de tamanhos iguais.



A criança deverá formar dois colares: um com as peças da caixa grande e outro com as peças da caixa pequena.

Possivelmente surgirão modelos bastante variados e criativos. Vamos supor que o aluno tenha criado estes dois modelos (ao lado).

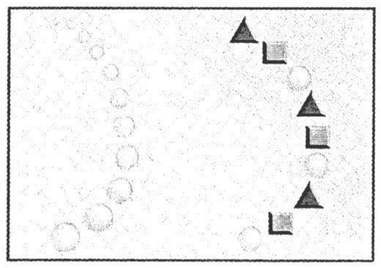
No primeiro colar, cada metade (considerada do centro para a extremidade) caracteriza uma série decrescente por *tamanho* da peça, em que cada peça tem um lugar específico. Qualquer mudança de posição entre elas será imediatamente percebida.

No segundo, observamos grupos de peças que se repetem, sendo possível trocar de lugar duas equivalentes sem que se note a troca (a primeira com a quarta, a segunda com a quinta, etc.). Isso acontece porque as peças agora não estão em ordem crescente ou decrescente de tamanho, pois a característica escolhida foi a *forma* das peças, que não é uma grandeza quantificável.



Juca Martins/Pulsar

As cores das alas numa escola de samba.



Quando se considera uma grandeza não-quantificável como o principal atributo de formação de uma "fila" — tal como forma, cor, tipo de estampa de um tecido, etc. —, é comum usar-se uma seqüência. É o que acontece, por exemplo, na distribuição das alas de uma escola de samba, que muitas vezes obedece a uma seqüência de cores.

Todas essas seqüências são *repetitivas*, ou seja, apresentam um "motivo", que é a menor parte da seqüência, cuja repetição permite formá-la.

Existem ainda as seqüências *recursivas*, nas quais, a partir de um motivo inicial, cada novo grupo é formado mediante uma regra repetitiva aplicada ao grupo anterior. Por exemplo:



Algumas seqüências, como o alfabeto, por exemplo, são incorporadas pela tradição cultural. Desconhecemos suas regras de formação, mas elas nos são muito úteis, uma vez que nos ajudam a organizar as atividades do dia-a-dia. Não sabemos por que, em nosso alfabeto, o A precede o B, ou o M sucede o L, mas todos temos na memória essa ordem, que é fundamental, entre outras coisas, para encontrarmos o nome de alguém na lista telefônica.

No conjunto dos números naturais (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...), encontramos tanto seqüências repetitivas quanto recursivas. As repetitivas estão presentes desde o início da contagem, com o motivo inicial reaparecendo a cada nova dezena (0, 1, 2, ..., 9, ..., 30, 31, 32, ..., 39; ou 100, 101, 102, ..., 109).

Aplicamos a seqüência recursiva sobre esse mesmo "motivo" inicial, quando passamos de uma ordem para a outra. Temos então: 0, 1, 2, 3, ..., 9; depois, 10, 20, 30, ..., 90; em seguida, 100, 200, 300, ..., 900; e assim por diante, sempre multiplicando por 10 os elementos do grupo anterior.



COMPLEMENTAR

1. [Piaget por Piaget]

No texto a seguir (adaptação de um roteiro de filme feito na Suíça em 1977), Piaget esclarece alguns mal-entendidos sobre sua teoria e explica na prática como a criança raciocina, como desenvolve suas idéias em relação a quantidades, à seriação, à classificação, enfim, à gênese das estruturas elementares.

Defino a estrutura como sendo aquilo que a criança sabe fazer, e não aquilo que a criança pensa, simplesmente. Evidentemente, ela não domina a teoria da estrutura, mas executa certas ações e nós constatamos que aquilo que ela sabe fazer em suas ações é bem coordenado e, sobretudo, que isso lhe permite tirar, por dedução, conclusões em que não havia pensado antes, como veremos em seguida a propósito da seriação.

Dito de outro modo, a estrutura é, com efeito, um conjunto de poder dedutivo, de possibilidades de coordenar idéias que o sujeito possui e do qual o teórico pode formular as leis, de maneira abstrata. Mas no espírito da criança não há nada de abstrato, não há nada de teórico — há apenas um poder de coordenar idéias entre si, um conjunto de possibilidades de coordenação. Vejamos primeiramente como se constrói uma estrutura — a seriação.

[Professora mostrando à criança oito barrinhas de comprimentos diferentes.]

PROFESSORA: Você chamaria isso de pauzinho?
BÁRBARA: Sim.
PROFESSORA: Eles não são como uma escadinha?
BÁRBARA: Sim.
PROFESSORA: Eu vou lhe dar estes pauzinhos aqui e você vai colocá-los juntos, lado a lado, de maneira que eles formem uma escadinha.

As crianças pequenas, antes das operações, no nível operatório, se limitam a fazer pares, duplas de palitos. No exemplo a seguir, Bárbara, de 3 anos e meio, dispõe os bastões em duplas pequenas e grandes.

[Bárbara faz dois grupos de barras: as menores de um lado e as maiores, de outro.]

BÁRBARA: Os pequenos ficam aqui.
PROFESSORA: E os grandes?
BÁRBARA: Aqui.
PROFESSORA: Está bem.

[A mesma tarefa é proposta a Mathieu, de 6 anos e meio. Ele vai medindo as barrinhas, de duas em duas, até construir a "escada" toda.]

Mathieu constrói pelo método de tentativa por ensaio e erro, partindo do menor para chegar ao maior. Ele não tem um programa definido no momento em que começa a construir sua série. Portanto, ele se aproxima da estrutura sem tê-la alcançado ainda.

PROFESSORA: Como você fez isso?
MATHIEU: Você só precisa pegar do menor até o maior.
PROFESSORA: Qual é o menorzinho?
MATHIEU: Este.
PROFESSORA: Qual é o maior?
MATHIEU: Este.

[A mesma tarefa é dada a Catarina, 9 anos.]

CATARINA: Primeiro vou colocar todos juntos para ver qual é o maior.
PROFESSORA: Você pode me explicar melhor o que você fez?
CATARINA: Eu fui colocando todos juntos, para ver qual era o maior. Aos pouquinhos, até acabar. Fui colocando um ao lado do outro, até acabar.

Catarina, que tem 9 anos, possui a estrutura. Ela emprega o método operatório para construir a escada. Ela diz: "Eu vi qual era o maior; depois, o que continua maior e assim por diante". Ela pega sempre o maior pauzinho dos que sobram. Assim, constrói a seriação por um método exaustivo, sem ter necessidade de fazer várias tentativas. A partir dessa conquista, ela pode tirar conclusões que jamais havia imaginado antes.

[Agora, a professora mostra a "escada" pronta e aponta para a menor de todas as barras.]

PROFESSORA: Quantos pauzinhos tem aí que são maiores que este? [Apontando o menor de todos.]
CATARINA: [Depois de contar os pauzinhos.] Sete.
PROFESSORA: Foi rápido.
CATARINA: É, eu fiz bem rápido.
PROFESSORA: E agora? Quantos são menores que este? [Apontando o maior de todos.]
CATARINA: Sete.
PROFESSORA: Sete, de novo. Como você sabe? Você não contou.
CATARINA: Não, não contei. Eu soube porque tinha sete nessa direção, então, tem que ter sete na outra direção, porque são os mesmos pauzinhos.

Quando perguntamos quantos elementos são maiores que o menor, ela os conta. Em seguida perguntamos quantos elementos são menores que o maior; ela agora não tem necessidade de contá-los; imediatamente deduz que são os mesmos e responde "sete". Assim, a estrutura não é simplesmente a construção de uma organização serial, mas a possibilidade de as crianças tirarem conclusões que nunca haviam tirado, já que nunca haviam sido questionadas a respeito. Em outras palavras, a estrutura é a fonte de poder dedutivo, constituindo essencialmente o conjunto daquilo que a criança sabe fazer e não a idéia que ela faz desse saber.

(Adaptado de: PIAGET POR PIAGET. São Paulo, SE/Cenp, 1986.)

2. [Encontrando o próprio caminho]

Na década de 70, o matemático Zoltan Dienes apresentou uma proposta de método de ensino bastante coerente com a teoria do desenvolvimento infantil de Piaget. No texto a seguir, de 1971, Dienes fala, entre outras coisas, das "novas" atitudes que se devem estabelecer em sala de aula.

O antigo ponto de vista era o de considerar a matemática como um conjunto de processos mecânicos que devem ser aprendidos. O novo é o de se considerar esses processos como partes de um conjunto interligado de estruturas cada vez mais complexas: as crianças são levadas a descobrir o que essas estruturas são, do que são feitas e como se relacionam entre si, quando são colocadas em situações que englobam *fisicamente* essas estruturas.

A iniciação nesse tipo de aprendizagem exige uma mudança completa de ênfase por parte do professor. A "resposta" terá nesse caso somente uma importância secundária. A capacidade para encontrar o seu próprio caminho em situações cada vez mais complexas passará a ser enfatizada, ao invés de ser o produto final estático da "resposta".

A atividade de aprendizagem das crianças, individualmente ou em grupos, terá precedência sobre o "ensino" pelo professor parado na frente da classe. A discussão substituirá as afirmações autoritárias envolvendo respeito por parte do professor pelo pensamento da criança como um dinamismo em crescimento.

(DIENES, Zoltan e GOLDING, E. *Modern Mathematics for Young Children.* Apud WADSWORTH, Barry J. *Piaget para o professor da pré-escola e 1º grau*. 3. ed. São Paulo, Pioneira, 1989. p. 207.)

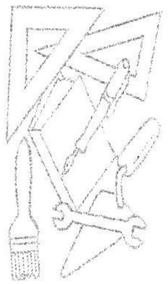
Sobre os textos

a) No texto "Piaget por Piaget", analise a atuação de Catarina diante das questões propostas e localize onde ela usou a propriedade transitiva da relação "ser maior que" para ordenar as barras.

b) Compare as atuações de Catarina e Mathieu, assinalando as semelhanças e diferenças.

c) Em "Encontrando o próprio caminho", o autor propõe que se deixe a criança pesquisar e buscar o seu jeito de aprender. Qual seria, então, a função do professor e do livro didático?

Para você fazer



1. Em dupla, ofereça a crianças de 5 a 7 anos os jogos de seriação e de seqüências propostos no capítulo. Observe as reações das crianças e procure compreender os critérios e o raciocínio que elas utilizam. Faça anotações individuais e troque idéias com seu colega. Depois, discuta com a classe as conclusões obtidas.
2. Elabore um quadro distinguindo série e seqüência e apresente-o aos colegas.

PARA SABER MAIS

CENTURIÓN, M. *Números e operações*. São Paulo, Scipione, 1994.

COORDENADORIA de Estudos e Normas Pedagógicas (Cenp). *Atividades matemáticas: ciclo básico*. São Paulo, Secretaria de Estado da Educação, 1993.

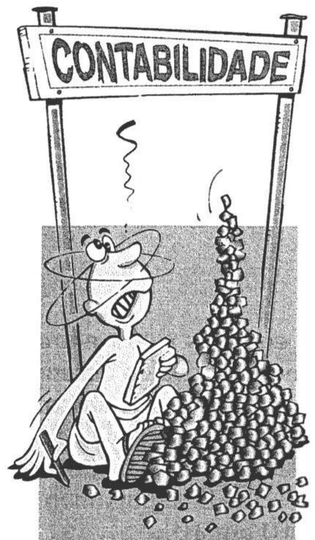
_____. *A criança e o conhecimento*. Projeto Ipê. São Paulo, Secretaria de Estado da Educação, 1990.

DIENES, Z. P. *As seis etapas do processo de aprendizagem em matemática*. São Paulo, Herder, 1972.

FUNDAÇÃO para o Desenvolvimento da Educação (FDE). *O jogo e a construção do conhecimento na pré-escola*. Série Idéias. n. 10. São Paulo, Secretaria de Estado da Educação, 1991.

MACHADO, N. J. *Lógica, é lógico!*. São Paulo, Scipione, 1989.

SEBER, M. da G. *A construção da inteligência pela criança*. São Paulo, Scipione, 1989.



5

O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

Dez ciclos da Lua compreendiam o ano romano.
Esse número era tido então em alta estima.
Talvez porque estejamos acostumados a contar pelos dedos.
Ou porque uma mulher, em duas vezes cinco meses, dá à luz.
Ou talvez porque os números cresçam até alcançar dez.
E então começam seu ritmo de um, outra vez.

Ovídio, poeta latino, 43 a.C.-18 d.C.

A grande invenção matemática

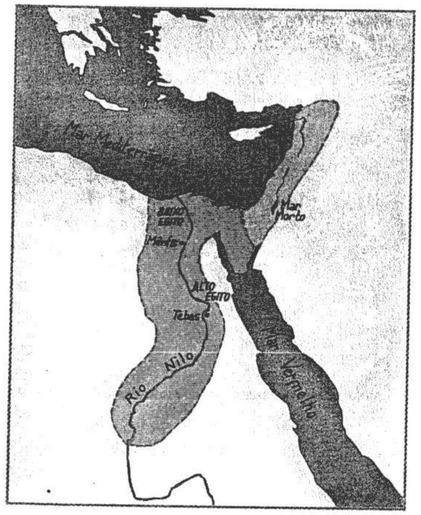
Professores habituados a trabalhar com crianças que apresentam dificuldade em "fazer contas" com os números naturais sabem que, na verdade, uma das principais causas do problema está no aprendizado do sistema de numeração decimal.

Esse conjunto de símbolos e regras foi criado pelos indianos há pelo menos 1 400 anos e superou todos os sistemas de numeração até então existentes. Seu aparecimento impôs uma mudança total no modo de realizar cálculos, que antes só podiam ser feitos mecanicamente, com o uso de algum material concreto, como pedrinhas ou contadores. O sistema de numeração decimal permitiu o cálculo por escrito, por meio de contas.

Em latim, pedrinha é *calculus*, palavra que originou os termos *cálculo*, *calcular*, *calculadora*, etc. Ainda hoje usamos a palavra *cálculo* com o significado de *pedra* ("Fulano está com *cálculos* nos rins").

Para compreender o quanto foi significativa a criação do sistema de numeração decimal, podemos fazer um rápido passeio pelo mundo antigo e conhecer um pouco dos primeiros sistemas numéricos.

Os antigos sistemas de numeração



O antigo Egito.

Os egípcios estão entre os primeiros povos a desenvolver um sistema numérico. A numeração egípcia data de cerca de 5 mil anos e baseava-se na idéia de agrupamentos de 10 em 10.

Cada símbolo que representava uma potência de 10 podia ser repetido até 10 vezes. Assim, os egípcios conseguiam escrever qualquer número, até mesmo aqueles muito grandes.

	(um graveto)	1 (ou 10^0)
	(um osso de calcanhar)	10 (ou 10^1)
	(um laço)	100 (ou 10^2)
	(uma flor de lótus)	1 000 (ou 10^3)
	(um dedo dobrado)	10 000 (ou 10^4)
	(um peixe)	100 000 (ou 10^5)
	(um homem ajoelhado)	1 000 000 (ou 10^6)

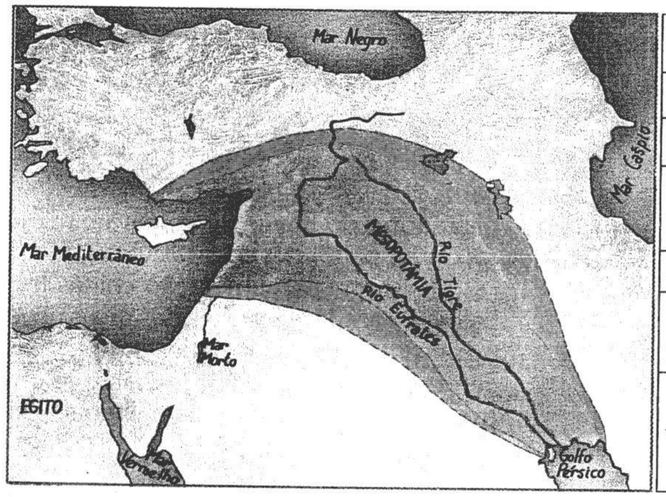
Símbolos numéricos egípcios e seus respectivos valores.

	39
	52 366
	180 647

Como podemos observar, não havia uma posição obrigatória para os símbolos, podendo os de menor valor ficar localizados tanto à direita como à esquerda dos de maior valor.

Dessa forma, não havia jeito de "armar uma conta". Assim, os cálculos eram realizados com auxílio de instrumentos como o ábaco, e só os resultados eram registrados com os símbolos.

Segundo Tobias Dantzig (1970), os egípcios "usavam uma numeração inflexível, tão grosseira que tornava o progresso quase impossível, e um artifício de cálculo de alcance tão limitado que até mesmo os cálculos elementares exigiam os serviços de um perito". Essa observação vale também para o sistema de numeração usado na Mesopotâmia.



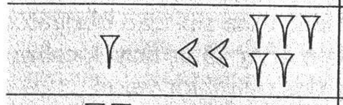
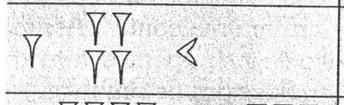
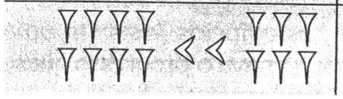
A Mesopotâmia.

Numeração babilônia	Numeração atual
	1
	2
	6
	10
	35
	59

Para representar os números, os mesopotâmios — ou babilônios, como também são chamados em referência à Babilônia, principal cidade da Mesopotâmia — empregavam apenas dois símbolos. Um mais largo e em posição horizontal, que representava um grupo de 10 unidades e que podia ser repetido até 5 vezes; e outro mais fino, em posição vertical, que representava 1 unidade e podia ser repetido até 9 vezes.

Vemos que eles usavam grupos de 10 unidades simples, mas sua notação utilizava a base 60 como fundamental. Assim, para os números acima de 59, repetia-se o símbolo da unidade simples, mas numa posição mais à esquerda do grupo inicial, correspondendo agora ao *valor 60*. Esse mesmo símbolo, usado ainda mais à esquerda, representava um grupo de 60 × 60, ou 3 600 unidades simples. Os mespotâmios foram, portanto, os precursores do sistema *posicional*, que os indianos aperfeiçoariam mais tarde.

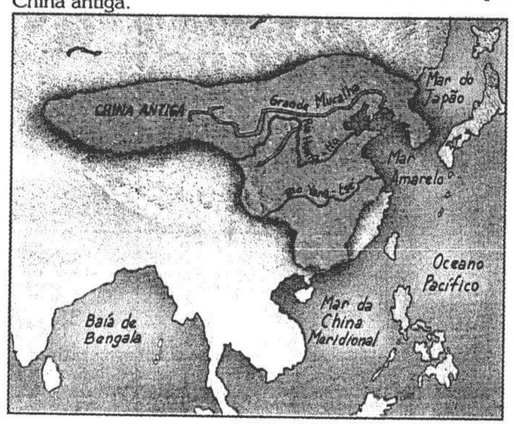
Vejamos mais alguns exemplos:

Numeração babilônia	Numeração atual
	85 (60 + 20 + 5)
	3 850 (3 600 + 240 + 10)
	506 (480 + 20 + 6)

A princípio, os babilônios não tinham um símbolo para o zero — o que certamente causava grandes dificuldades. Podemos imaginar quantas vezes houve problemas para distinguir entre o 3 (𒐗) e o 62 (𒐗 𒐗).

Somente muito mais tarde, cerca de 300 a.C., é que surgiu um símbolo para marcar um lugar vazio: duas pequenas cunhas em posição oblíqua. Com isso desaparece a ambigüidade entre 3 e 62, pois as representações passam a ser 𒐗𒐗 para o 3 e 𒐗𒌋𒐗 para o 62.

China antiga.



Na China foram adotados os "numerais em barras", criados em aproximadamente 300 a.C., segundo os registros existentes. Esses numerais eram a representação das barras verdadeiras — de bambu, marfim ou ferro —, que os administradores do Império carregavam numa sacolinha para fazer seus cálculos.

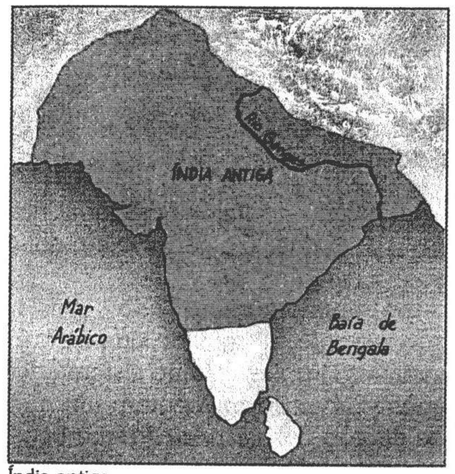
O sistema de numeração chinês trabalhava com 18 símbolos, dos quais nove representavam as unidades simples, as centenas e as dezenas de milhar, e os outros nove, as dezenas e os milhares:

𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	Unidades
100	200	300	400	500	600	700	800	900	Centenas
10 000	20 000	30 000	40 000	50 000	60 000	70 000	80 000	90 000	Dezenas de milhar
𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	Dezenas
1 000	2 000	3 000	4 000	5 000	6 000	7 000	8 000	9 000	Unidades de milhar

As "casas" eram ocupadas da direita para a esquerda, alternando os símbolos dos dois grupos, ou seja, um símbolo do primeiro grupo, depois do segundo, novamente do primeiro, e assim por diante.

𝍠𝍢 𝍩𝍦 359	𝍡 𝍨𝍦 𝍮 𝍦 1 967
𝍩𝍦 𝍫 𝍤𝍣 5 734	𝍨𝍦 𝍯 𝍥 886

Nesse sistema também não havia, de início, nenhum símbolo para representar uma casa vazia. Ele só apareceria bem mais tarde, e o primeiro registro de que se tem notícia surge numa obra datada de 1247, da qual constava o número 1 405 536, com um símbolo redondo para representar o zero.



Índia antiga.

Foram os indianos que desenvolveram o sistema de numeração que utilizamos até hoje, o qual representa uma síntese das idéias que já existiam esparsamente entre outros povos da Antiguidade:

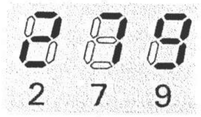
- a base decimal;
- a notação posicional;
- um signo para cada um dos dez primeiros números.

A princípio, os indianos criaram apenas nove símbolos, representando os números de 1 a 9. Demoraram ainda cerca de duzentos anos para perceber a necessidade de um signo que ocupasse o lugar de uma casa vazia. Então, apareceu o *sunya*, que no idioma indiano significa "vazio" ou "espaço em branco".

Quando os árabes, no século X, adotaram a numeração indiana, traduziram *sunya* por *sifr*, que em sua língua também significa "vazio". Foi esse povo que, com seu florescente comércio, divulgou pela Europa o sistema decimal posicional — conhecido até hoje como *sistema de numeração indo-arábico*. Na Itália, por volta do século XIII, o nome *sifr* foi latinizado para *zephirum*, que, com mais algumas modificações, chegou ao termo italiano "zero".

As regras do sistema de numeração indo-arábico permaneceram as mesmas nos últimos vinte séculos, mas a forma de se escreverem os algarismos sofreu modificações ao longo desse tempo. Isso porque, até meados do século XV, os documentos eram manuscritos, portanto a forma dos algarismos dependia de cada escriba. A partir da criação da imprensa pelo alemão Gutemberg, os algarismos e letras se estabilizaram, como podemos observar na tabela a seguir:

Indiano séc. III a.C.										
Indiano séc. IV-VI										
Árabe Oriental séc. IX										
Árabe Ocidental séc. XI										
Europeu séc. XVI										
Atual	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0



Atualmente estamos assistindo a uma nova modificação na forma desses algarismos, introduzida pelos relógios, calculadoras e outros aparelhos digitais.

Romanos × indianos

Para entender melhor o significado do valor posicional no sistema de numeração, podemos examinar o algarismo em dois sistemas diferentes: o romano e o decimal.

No sistema romano, VIII representa o número "oito", pois o símbolo I tem sempre o mesmo valor de "1 unidade simples", e o símbolo V, o valor de "5 unidades simples". Já no sistema de numeração decimal, os mesmos símbolos representam um número totalmente diferente, de acordo com a *posição* que ocupam, representando agrupamentos diferentes de unidades. Assim, em "5 111", o primeiro símbolo 1, da direita para a esquerda, representa "1 unidade simples"; o mesmo símbolo 1, na segunda posição, representa "10 unidades simples"; e, na terceira, "100 unidades simples"; o símbolo 5, equivalente ao V romano, representa "5 000 unidades simples", por estar ocupando a quarta posição no numeral.

A maioria de nós recebeu essa "informação" e a decorou, sem refletir muito sobre ela. Embora a utilizemos nos algoritmos que aplicamos para somar, subtrair, multiplicar e dividir números naturais, ao fazer isso operamos de modo automatizado. Dessa maneira, deixamos de estabelecer as devidas relações, decorando "novas" regras para cada "nova" situação que, na realidade, aplica os mesmos princípios — tais como:

a) números racionais, sob a forma decimal;

b) representação de medidas no sistema métrico decimal, em que temos agrupamentos de 10 em 10 (caso do metro, do litro, do grama, com seus múltiplos e submúltiplos), agrupamentos de 100 em 100 (caso do metro quadrado, com seus múltiplos e submúltiplos), agrupamentos de 1 000 em 1 000 (caso do metro cúbico, com seus múltiplos e submúltiplos);

c) representação de medidas em outros sistemas, como o grau, que mede ângulos, com seus submúltiplos *minuto* e *segundo* agrupando-se de 60 em 60.

OLHANDO MAIS DE PERTO

Você conhece bem os sistemas de numeração? Então vamos fazer um teste.

1. Represente os números 2, 5, 32, 147, 478 e 3 742 nos sistemas egípcio, babilônio e chinês.
2. Complete o quadro abaixo e responda às perguntas a seguir:

Numeração romana	Numeração indo-arábica
CCCXLVIII	348
_____	219
CCXXXIV	_____
CMLXXIV	_____
_____	860

a) Escreva todos os símbolos do sistema de numeração romano.

b) Esse sistema é posicional?

c) Trabalha com base 10?

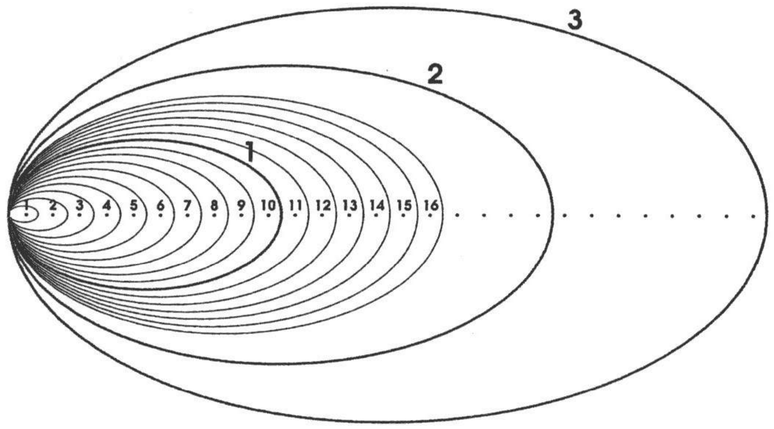
d) Um aluno quer representar com algarismos romanos o número 99. Ele está em dúvida, pois acha que há dois modos: IC ou XCIX. O que você acha dessa idéia?

Aprendendo o sistema decimal

Pudemos observar, ao percorrer as civilizações antigas, que houve muitas tentativas até se chegar a um sistema que permitisse representar os números com poucos algarismos e de modo tão prático.

Todo esse esforço demonstra que ele não é tão simples, nem tão fácil de ser compreendido quanto parece. A partir de pesquisas realizadas com crianças entre 4 e 9 anos de idade, a pesquisadora Constance Kamii (1994: 91) observou o seguinte:

> A criança de 6 e 7 anos está ainda em processo de construir o sistema numérico, com operações de "+ 1". [Sobre inclusão hierárquica, releia o capítulo 2.] O sistema escrito na base decimal exige a construção mental de "1" (uma coleção de dez) em "10" unidades e a coordenação da estrutura hierárquica de dois níveis (mostrada na figura a seguir). É impossível construir o segundo nível, quando o primeiro ainda está sendo construído. Como vimos, a criança não pode criar a estrutura hierárquica da inclusão numérica antes da idade de 7 ou 8 anos, que é quando seu pensamento se torna reversível.



Portanto, para introduzir o sistema decimal aos alunos, é aconselhável que o professor realize um trabalho mais prolongado, desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, com atividades diversificadas sobre agrupamentos e trocas, além da familiarização com o valor posicional dos algarismos. Essas atividades culminam com o estudo da representação formal, que pode ser feito na 2ª série.

O trabalho com agrupamentos e trocas

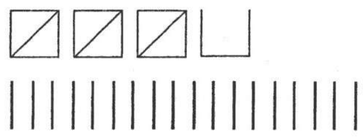
A idéia-chave do sistema decimal é utilizar o valor posicional dos algarismos para representar a ação de agrupar e trocar, que a humanidade sempre empregou para avaliar grandes quantidades de objetos (há registros do uso dessas ações desde a Pré-História). Ao repartir uma grande quantidade de jabuticabas, por exemplo, as crianças começam com "uma para cada um". Quando percebem que há muitas frutas, passam para "uma mão cheia para cada um". A unidade de referência deixa de ser *uma* jabuticaba, para ser "*uma* mão cheia".

Não são só as crianças que realizam a operação de agrupar e trocar. Observe, ao lado, um tipo de referência que um adulto pode utilizar quando precisa compreender a ordem de grandeza de um número que não lhe é familiar:



A unidade de referência deixa de ser a moeda corrente e passa a ser "o preço do meu apartamento".

Também para marcar os pontos obtidos em um jogo utiliza-se agrupamento:



Com certeza o primeiro modo é mais prático, pois os pontos são agrupados de 5 em 5; no segundo, os pontos obtidos são marcados de 1 em 1, o que dificulta a visualização do total de pontos.

Ao recordar e contar as pessoas que estavam presentes a uma festa, utilizamos o agrupamento: fazemos corresponder cada uma a um dedo das mãos, até completar os dez; depois, recomeçamos a correspondência a partir do primeiro dedo usado, mas lembrando que já está contabilizado "um grupo de dez pessoas".

Embora essas ações sejam intuitivas, é necessário propor às crianças situações variadas em que elas tenham oportunidade de agrupar grandes quantidades de elementos e depois registrá-los, para que aos poucos se conscientizem da operação realizada.

Sugere-se que as primeiras experiências sejam realizadas em bases variadas, e não apenas na base 10 (sem representar a ação realizada), iniciando-se na 1ª série do Ensino Fundamental. Essa proposta está apoiada em dois argumentos.

Em primeiro lugar, a criança constrói seus conhecimentos a partir da coordenação das relações que vai criando entre os objetos e as ações sobre esses objetos. Assim, quanto mais diversificadas forem as situações de agrupamentos e trocas em que estiver envolvida, mais oportunidades ela terá de observar as semelhanças e diferenças entre essas situações, realizando abstrações e construindo o conceito.

Observa-se, então, que a tradicional proposta de se trabalhar, na 1ª série, os números naturais menores que 100 impede que os alunos construam o significado do "agrupar e trocar", o que os leva a decorar os termos *unidade* e *dezena*, sem compreender realmente o que é e para que serve isso.

Em segundo lugar, só é possível compreender o significado de *base* de um sistema de agrupamentos e trocas quando se realizam pelo menos duas trocas na base proposta.

Nas bases 2, 3, 4, etc., consegue-se realizar tais trocas com poucos elementos. No entanto, para se chegar à segunda troca, na base 10, é necessário manipular pelo menos uma centena de objetos, o que não é fácil nem para um adulto, quanto mais para crianças de 7 ou 8 anos de idade.

Já a representação é tarefa bastante abstrata e sofisticada para o nível das séries iniciais do Ensino Fundamental. Ela só deve ser realizada para os agrupamentos e trocas na base 10, e apenas quando o professor perceber que as crianças já estão trabalhando com segurança os agrupamentos e trocas, o que geralmente ocorre no início da 2ª série.

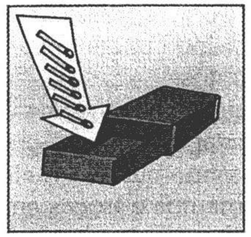
Seguindo as sugestões de Dienes, podem ser feitos *jogos de isomorfismo* focalizando os agrupamentos e trocas. Vejamos alguns exemplos:

Fábrica de fósforos

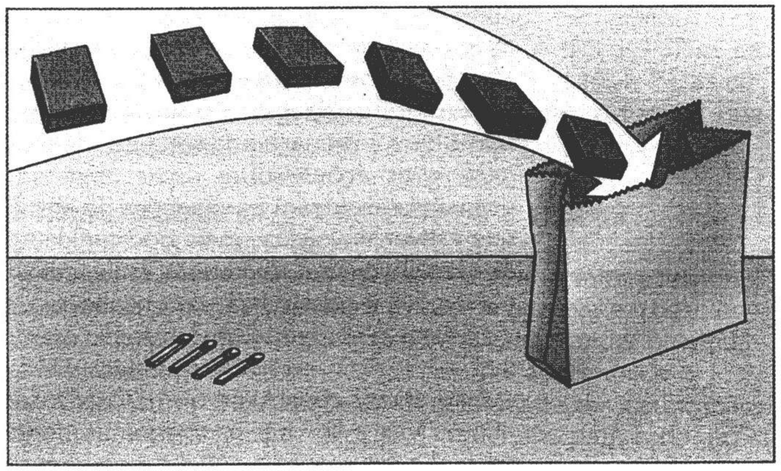
A fábrica de fósforos é uma atividade que motiva bastante as crianças. Cada criança recebe uma quantidade de palitos de fósforos e combina-se, por exemplo, que cada 6 palitos serão colocados em uma caixa. A seguir, cada 6 caixas completas serão colocadas em um saquinho de papel, ou seja, a cada grupo de 6 elementos de um tipo, fazemos a troca por 1 elemento do tipo seguinte (palitos por caixa, caixas por saquinho). Dizemos, então, que essas trocas estão sendo feitas na base 6.

Realizada a tarefa, propõe-se a verificação de quem recebeu a maior quantidade de fósforos para embalar. Os alunos logo descobrem que não é necessário contar palito por palito; basta conferir quem conseguiu formar a maior quantidade de saquinhos.

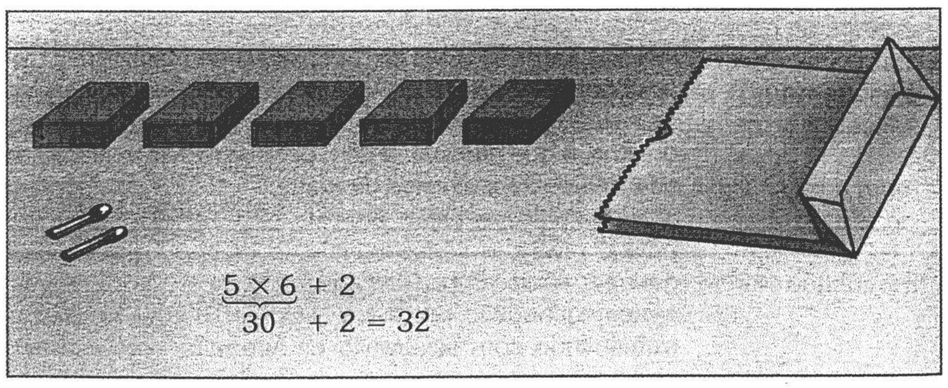
Se, por exemplo, um aluno recebeu 40 palitos para embalar, seu resultado final será:



$\underbrace{6 \times 6}_{36} + 4 = 40$



Quem recebeu 32 palitos terá:

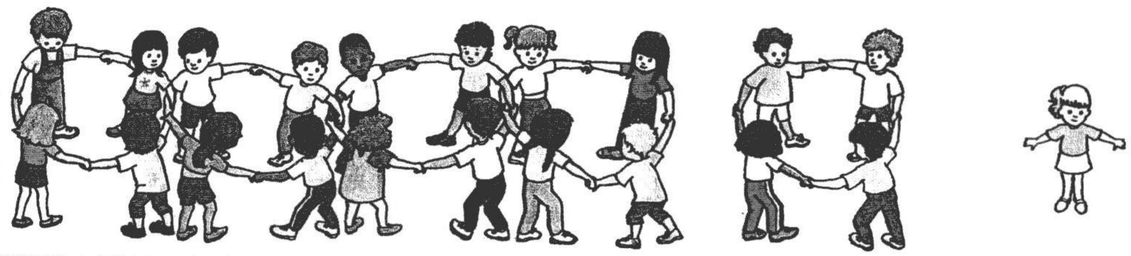


Mesmo sem contar os palitos, as crianças percebem que o primeiro aluno ganhou mais palitos inicialmente, pois conseguiu formar um saquinho, enquanto o segundo, não.

Sozinho, rodinha, corrente

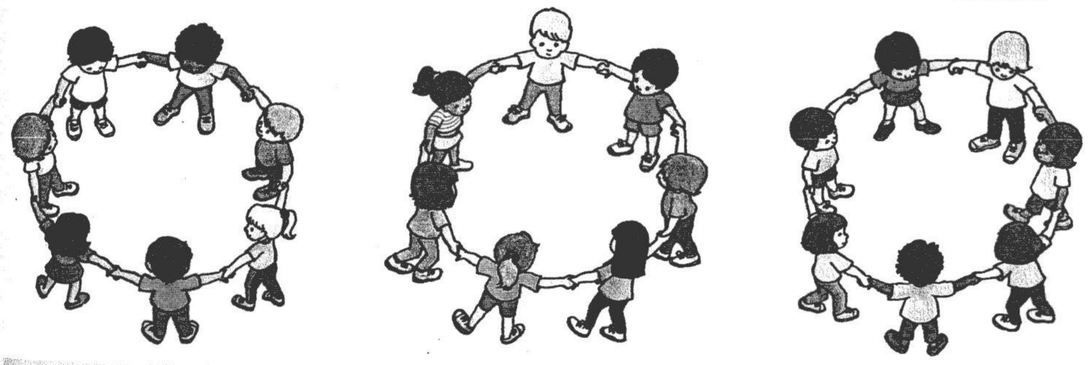
Essa brincadeira é realizada no pátio da escola. Os alunos se dispersam e o professor diz um número, que indica a quantidade necessária de crianças "para formar uma rodinha"; e, também, a quantidade de rodinhas "para formar uma corrente".

Suponhamos que o professor tenha indicado o número 4 e que haja 21 crianças no jogo. Teremos, então, 5 rodinhas de 4 crianças, ficando 1 criança sozinha. A seguir, 4 dessas rodinhas poderão se juntar, formando 1 corrente. Como resultado final, teremos: 1 "corrente", 1 "rodinha" e 1 "sozinha". Nesse caso, estamos trocando 4 crianças por 1 rodinha e 4 rodinhas por 1 corrente, ou seja, as trocas estão sendo feitas na base 4.



$4 \times 4 \quad + \quad 1 \times 4 \quad + \quad 1$

Com as mesmas 21 crianças, se o professor tivesse sugerido o número 7, teriam sido formadas 3 rodinhas, não restando nenhuma criança sozinha. Dessa vez, não seria formada nenhuma corrente, porque para isso seriam necessárias 7 rodinhas.



$1 \times 7 \quad + \quad 1 \times 7 \quad + \quad 1 \times 7$

Nessa atividade, além de trabalhar com agrupamentos e trocas, os alunos também estarão exercitando o cálculo mental, tão importante desde as fases iniciais de aprendizagem. Para formar rodinhas de 7 crianças, surgirão oportunidades de realizar todas as adições possíveis (e também algumas subtrações) com resultado "7".

Contagem com fichas

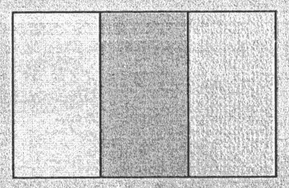
Em qualquer jogo, o professor pode transformar a contagem de pontos numa situação lúdica: a cada ponto feito, o jogador recebe, por exemplo, uma ficha azul. A princípio, as crianças consideram esse método eficiente, mas quando o número de pontos dos participantes começa a aumentar, surgem as dificuldades em comparar as quantidades. É o momento de sugerir, por exemplo, que sejam trocadas 5 fichas azuis por 1 vermelha. E quem consegue completar 5 vermelhas troca por 1 verde.

Os participantes do jogo logo percebem que, para saber a qualquer momento quem está ganhando, não há necessidade de contar ponto por ponto; basta verificar quem tem mais fichas vermelhas ou, melhor ainda, mais verdes.

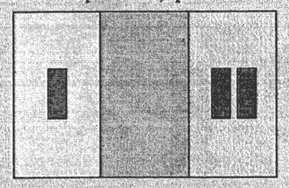
É bastante produtivo que desde o início da contagem de pontos os alunos se acostumem a arrumar suas fichas em posições adequadas. Esse hábito, além de permitir visualizar a situação de cada jogador, já estará preparando caminho para a compreensão do valor posicional dos algarismos. Assim, pode-se sugerir que cada criança construa um ábaco de papel.

ÁBACO DE PAPEL

Ábaco, na verdade, é qualquer instrumento de manipulação que ajude a fazer cálculos (cartaz de pregas, contador, cartaz de valor de lugar, soroban, etc.). Nosso ábaco de papel é feito com uma folha de sulfite. O professor pede aos alunos que dobrem a folha em três partes iguais e pintem cada uma com uma cor usada nas fichas — em ordem crescente de valor, da direita para a esquerda.

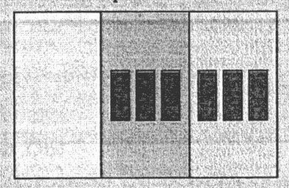


Aqui temos um exemplo de "problema" que não apresenta números nem exige contas para ser resolvido. Dobrar uma folha em três partes iguais não é coisa simples para crianças de 1ª série. Em geral, a tendência é dobrar a folha ao meio e, ao descobrir que resultaram apenas duas partes, dobrá-la novamente ao meio. Ao perceber que desse modo obtiveram quatro partes, as crianças ficam um tanto desapontadas. A solução demora um pouco a aparecer, por isso é aconselhável que façam suas tentativas iniciais com papel de sucata (folhas de revistas velhas, por exemplo). Assim, as crianças terão liberdade de experimentar, errar, pegar outra folha, tentar de novo, sem medo de estragar o sulfite.



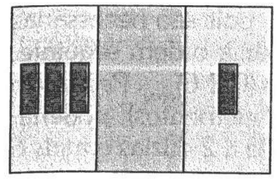
Veja como ficaria o ábaco, no caso de uma criança que tivesse somado 27 pontos, com trocas de 5 em 5:

Seria interessante que os próprios jogadores passassem a sugerir os valores para as trocas de fichas nas diversas partidas.

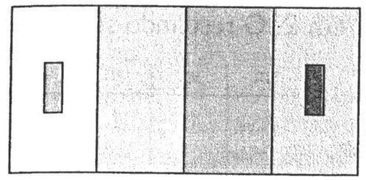


Suponhamos que a base de troca escolhida agora seja 8. Se o jogador estiver com 27 fichas azuis, feitas as trocas na nova base, seu ábaco de papel apresentará a seguinte configuração:

A partir dessas sugestões, é possível criar outras atividades em que haja a ação de agrupar e trocar. Note, porém, que, para compreender o que significa a "base" das trocas, o aluno deve realizar pelo menos duas trocas de cada vez. É por isso que sugerimos o ábaco com três partes.



Depois de sugerir várias experiências, é importante que o professor apresente algumas situações em que as três partes do ábaco não sejam suficientes, pois haverá necessidade de mais uma troca. Por exemplo: se um participante está com 28 fichas azuis e as trocas estão sendo feitas de 3 em 3, seu ábaco ficará como mostra a figura ao lado.



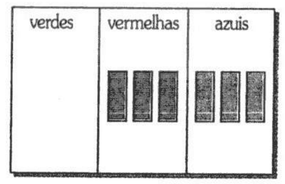
Observando o resultado, os alunos perceberão que as 3 fichas verdes resultantes podem ser trocadas por outra ficha, de maior valor. Será necessário, então, aumentar o ábaco, colando mais uma parte, que terá a cor da nova ficha e que irá valer as 3 verdes.

Em geral, os alunos se mostram muito empolgados com essa atividade, pois percebem que a quantidade de "casas" que podem colocar no ábaco é ilimitada. É comum ouvir das crianças: Isso é infinito?"; "posso pôr quantas casas quiser!".

Esse tipo de atividade envolve a ação de agrupar e trocar mas, ao mesmo tempo, prepara o aluno para a multiplicação e a divisão, que lidam justamente com grupos que têm a mesma quantidade de elementos.

Experimente realizar agrupamentos e trocas propostos a seguir. Construa um ábaco com papel e fichas coloridas. Depois, represente os resultados no caderno. Lembre-se, porém, de que ainda não é o momento de introduzir as representações às crianças.

1. Com 30 fichas azuis, faça agrupamentos e trocas de 9 em 9. Confira o resultado:

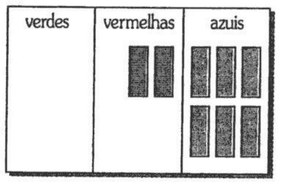


vd	vm	az
0	3	3

Representação: $(\,0\;3\;3\,)_{nove}$

As trocas foram realizadas na base 9, pois são necessárias 9 fichas de uma cor para obter 1 ficha do tipo imediatamente superior.

2. Agrupe as mesmas 30 fichas de 12 em 12. Observe:

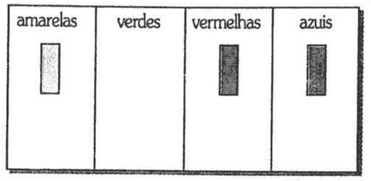


vd	vm	az
0	2	6

Representação: $(\ldots\ldots)_{doze}$

As trocas foram realizadas na base 12, pois são necessárias 12 unidades de uma ordem para se passar à ordem seguinte. Poderíamos fazer essa representação como $(0\ 2\ 6)_{doze}$. Pensando na unidade dúzia (um agrupamento de 12 elementos), poderíamos dizer que a quantidade 30 corresponde a 2 dúzias e mais 6 fichas; ou, ainda, 2 dúzias e meia de fichas.

3. Agrupe 11 fichas azuis de 2 em 2. O resultado será:



am	vd	vm	az
1	0	1	1

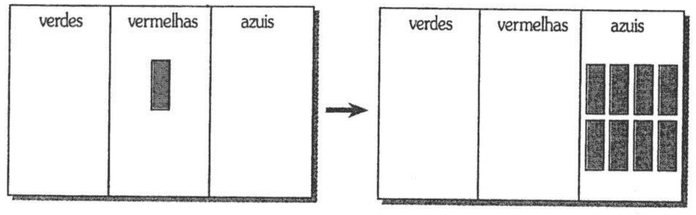
Ou: (.....)$_{dois}$

O trabalho de agrupamentos e trocas na base 2 ganhou especial significado com o advento dos computadores, que funcionam utilizando essa base (o chamado *sistema binário*). Todo computador emprega "portas lógicas" para realizar seu trabalho. Essas "portas" são os transístores-interruptores que permitem ou não a passagem da corrente elétrica (ligado/desligado). Convencionou-se indicar pelo 0 o estado "desligado" de um interruptor e pelo 1 o estado "ligado". Assim, para representar as 11 fichas na base 2 você deve ter feito $(1\ 0\ 1\ 1)_{dois}$, o que, no computador, corresponde aos estados ligado-desligado-ligado-ligado. Como seria representado, no computador, o número 8? Tente resolver.

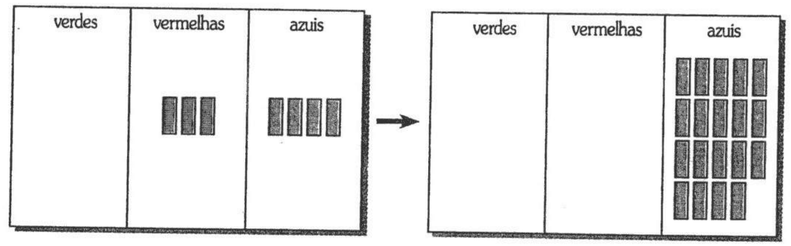
Desfazendo as trocas

Assim como foi feito o trabalho de trocar um grupo de fichas por outra ficha de maior valor, também é preciso realizar o inverso: trocar uma ficha de maior valor por um grupo de fichas de menor valor. Veja as situações a seguir.

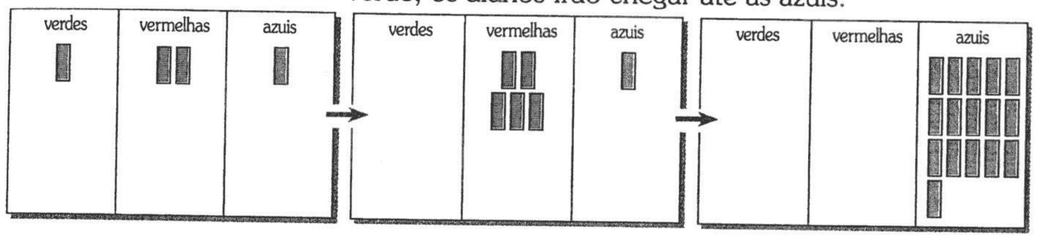
1. Após realizar suas jogadas, uma pessoa ficou com apenas 1 ficha vermelha. Sabendo que as trocas de fichas haviam sido feitas de 8 em 8, descubra quantos pontos essa pessoa fez.
As crianças deverão colocar a ficha vermelha no ábaco e, fazendo o caminho inverso, chegar ao total de fichas azuis.



2. Ao fazer as trocas de suas fichas de 5 em 5, uma pessoa ficou com 3 vermelhas e 4 azuis. Quantos pontos havia feito?
Novamente, a situação deverá ser reproduzida no ábaco. Trocando cada ficha vermelha por 5 azuis, a pessoa ficará com 19 fichas azuis, ou 19 pontos.



3. E se tivermos feito as trocas de 3 em 3, ficando com 1 verde, 2 vermelhas e 1 azul? Começando a trocar pela verde, os alunos irão chegar até as azuis:

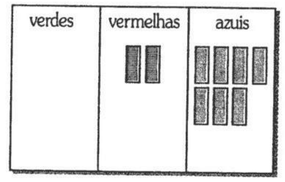


Trabalhando o valor posicional dos algarismos

Quando os alunos já estiverem suficientemente amadurecidos no trabalho com agrupamentos e trocas, o professor poderá introduzir as crianças nas atividades de *representação*.

Não há necessidade de representar os agrupamentos e trocas nas várias bases, mas apenas os de base 10. Nesse momento, inicia-se o trabalho com o valor posicional dos algarismos, que em geral aprendemos de modo mecânico, sem nos darmos conta do que realmente significam as unidades, dezenas, centenas, etc.

Para que o aluno entenda o valor posicional dos algarismos, o professor poderá utilizar, também aqui, atividades diversificadas de representação. Com o ábaco, o aluno faz agrupamentos e trocas na base 10 e vai registrando no caderno os resultados que obtém. Por exemplo, com 27 fichas azuis e fazendo trocas de 10 em 10, obtêm-se 2 fichas vermelhas e sobram 7 azuis; a representação no caderno fica assim:



vd	vm	az
0	2	7

Outro excelente recurso para facilitar a compreensão do valor posicional dos algarismos é o material dourado.

MATERIAL DOURADO

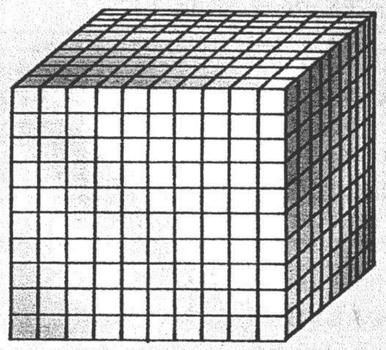
O material dourado foi criado pela médica italiana Maria Montessori (1870-1952) quando ela trabalhava com crianças que apresentavam distúrbios de aprendizagem. Montessori observou que, para essas crianças, mais do que para as outras, era muito importante a ação na construção dos conceitos, e desenvolveu uma série de materiais e estratégias de trabalho. Devido à grande eficiência demonstrada, seu método de ensino passou a ser utilizado em várias escolas comuns, as chamadas *escolas montessorianas*.

O material original era constituído de contas de plástico transparente, na cor dourada — daí o nome.

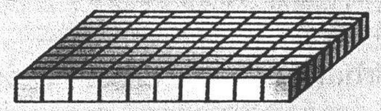


Nelson Toledo

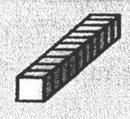
Hoje, o material dourado, ou montessoriano, geralmente é constituído de peças de madeira, apresentadas em quatro tipos: cubo, placa, barra e cubinho.



CUBO
(10 cm × 10 cm × 10 cm)



PLACA
(1 cm × 10 cm × 10 cm)



BARRA
(1 cm × 1 cm × 10 cm)



CUBINHO
(1 cm × 1 cm × 1 cm)

A grande vantagem desse material é permitir que a criança visualize os valores de cada peça por correspondência dos tamanhos e formatos. Assim, ela consegue observar que:

- uma barra pode ser formada por 10 cubinhos;
- uma placa, por 10 barras (ou 100 cubinhos);
- um cubo, por 10 placas (ou 100 barras ou, ainda, 1 000 cubinhos).

Ao contrário do ábaco, por exemplo, em que é necessário *convencionar* determinado valor para a troca das peças ("5 fichas azuis serão trocadas por 1 vermelha; 5 vermelhas, por 1 verde"), no material dourado os agrupamentos e trocas na base 10 aparecem concretizados.

Atividades com o material dourado

Quando se oferece um material novo para as crianças, a primeira atividade que se recomenda é sempre o jogo livre: apresenta-se o material às crianças e deixa-se que elas o utilizem como quiserem. Assim, os alunos irão manipular as peças do material dourado, conhecendo-as, relacionando-as e até dando nomes para elas.

A segunda etapa é o *jogo com regras*, em que se propõem à criança atividades planejadas envolvendo equivalência, agrupamentos e trocas na base 10, representação, sucessão de um número com ênfase na passagem de dezenas ou centenas, etc.

EQUIVALÊNCIA

O professor dá o nome convencional das peças para que todos usem a mesma nomenclatura, em vez dos nomes particulares que podem ter dado anteriormente. A seguir, pede aos alunos que descubram:

a) Quantos cubinhos precisamos enfileirar para formar uma barra?
b) Quantas barras são necessárias para formar uma placa?
c) Com quantas placas se forma um cubo?

Numa segunda etapa, pede que verifiquem:

a) Quantos cubinhos há em uma placa?
b) Quantas barras formam um cubo?
c) Com quantos cubinhos podemos fazer um cubo?

CONSTRUÇÕES

O professor pede aos alunos que construam a figura que desejarem e, depois, contem quantos cubinhos foram utilizados na construção. Depois, pode sugerir a eles que construam:

a) um avião com 18 cubinhos;
b) uma ponte com 26 cubinhos (algumas crianças usarão 26 cubinhos; outras, 2 barras e 6 cubinhos);
c) uma mesa com 140 cubinhos (a maioria delas usará 1 placa e 4 barras).

AGRUPAMENTOS E TROCAS NA BASE 10

Os alunos constroem agora um ábaco de papel, dobrando uma folha de sulfite em quatro partes iguais. Em seguida, desenham as peças ou escrevem o nome de cada uma:

CUBO	PLACA	BARRA	CUBINHO

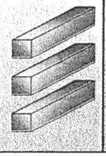
ou

Depois, cada criança recebe uma quantidade de cubinhos e deverá fazer com eles todas as trocas de peças que forem possíveis. Por exemplo:

a) Com 12 cubinhos, as trocas nos permitirão obter:

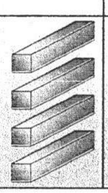
CUBO	PLACA	BARRA	CUBINHO
			

b) Com 32 cubinhos, conseguiremos fazer:

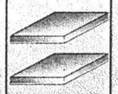
CUBO	PLACA	BARRA	CUBINHO
			

Agora o professor já pode oferecer peças variadas e pedir que troquem tudo o que for possível. Por exemplo:

a) Com 21 cubinhos e 2 barras, fazemos:

CUBO	PLACA	BARRA	CUBINHO
			

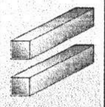
b) Com 1 placa, 8 barras e 30 cubinhos, conseguiremos formar:

CUBO	PLACA	BARRA	CUBINHO
			

REPRESENTANDO AGRUPAMENTOS E TROCAS

Atividades semelhantes às do item anterior são repetidas, com a diferença de que agora os alunos devem registrar tudo no caderno, em forma de tabela, e fazer a leitura do número representado. Por exemplo:

a) O que dá para formar com 23 cubinhos?

CUBO	PLACA	BARRA	CUBINHO
			

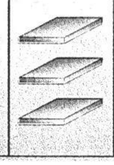
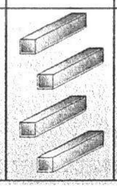
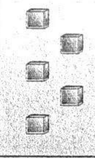
→

cubo	placa	barra	cubinho
1	0	2	3

De acordo com o interesse demonstrado pelos alunos, o professor pode dar nome às diversas ordens:

CUBO	PLACA	BARRA	CUBINHO
Unidade de milhar (UM)	Centena (C)	Dezena (D)	Unidade simples (U)

b) Com 2 placas, 12 barras e 25 cubinhos, formaremos:

UM	C	D	U
			

→

UM	C	D	U
0	3	4	5

O SUCESSOR NA PASSAGEM DE DEZENAS OU CENTENAS

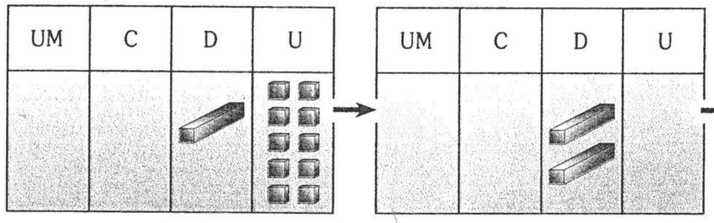
Todos nós já vimos crianças "recitando" a série numérica e cometendo erros como: ...27, 28, 29, 20 e 10, 20 e 11, etc. Mesmo que sejam corrigidas, durante certo tempo esse tipo de erro persistirá na passagem de outras dezenas. Mais tarde, após finalmente terem "aprendido" a regra, surpreendem-se quando são corrigidas ao contar: ...107, 108, 109, 200.

Sabemos que é no dia-a-dia que as crianças constroem seus conhecimentos relativos à língua materna, estabelecendo relações de semelhança e diferença e buscando as regularidades. Assim, costumam errar quando empregam verbos irregulares, por exemplo, ou palavras cujo feminino ou plural não é regular.

Do mesmo modo, aprendem a contar buscando as regularidades, sem o domínio do processo de agrupamentos e trocas. Daí a importância de se realizarem com os alunos atividades que os ajudem a compreender o que de fato acontece ao se passar de uma dezena ou centena para outra, na série numérica.

Vejamos um exemplo:

Os alunos colocam algumas peças do material dourado no ábaco, representam o número correspondente no caderno e fazem a leitura do número. A seguir, o professor apresenta alguma situação em que eles verificam o que acontece quando acrescentam 1 cubinho no ábaco, do tipo: "Há 1 barra e 9 cubinhos. Se acrescentarmos mais 1 cubinho, o que teremos?". Por fim, os alunos deverão representar e ler o novo número.



UM	C	D	U
0	0	1	9
0	0	2	0

Outras atividades do mesmo tipo poderão ser feitas com quantidades de peças que o professor achar conveniente, para que os alunos discutam situações como:

a) Com 9 barras e 9 cubinhos no ábaco, que modificações sofrerá o número se acrescentarmos 1 cubinho?

b) Com 1 placa e 9 cubinhos, o que acontece quando acrescentamos 1 cubinho?

c) E com 1 placa e 9 barras, se acrescentarmos 1 barra?

d) E com 9 placas, 9 barras e 9 cubinhos, se acrescentarmos 1 cubinho?

Ações inversas

O professor põe algumas peças no ábaco, e os alunos devem fazer as trocas a partir das peças de maior valor, até descobrirem quantos cubinhos serão obtidos. Por exemplo:

a) Com 1 barra e 8 cubinhos, quantos cubinhos conseguiremos?

b) 1 placa equivale a quantos cubinhos?

c) Quantos cubinhos correspondem a 1 placa, 2 barras e 3 cubinhos?

d) 1 cubo corresponde a quantas barras? E a quantos cubinhos?

Do caderno para o ábaco

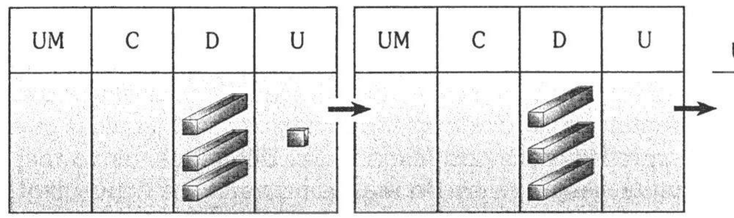
Primeiro as crianças escrevem os números; depois, fazem a representação no ábaco. Por exemplo: para o número 75, os alunos deverão colocar no ábaco 7 barras e 5 cubinhos.

a) Para o número 243, o que será colocado no ábaco?

b) E para o número 504?

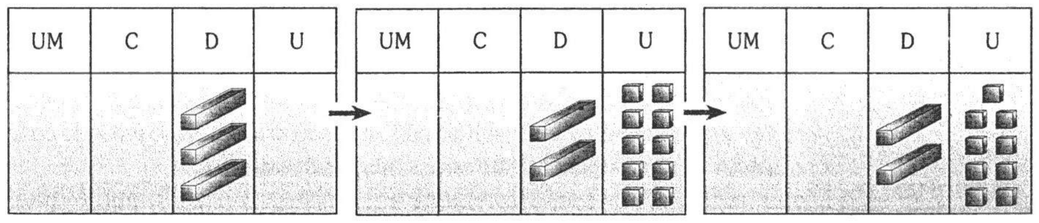
Antecessor de um número na passagem de dezenas e centenas

Os alunos colocam algumas peças no ábaco; em seguida, representam no caderno o número correspondente e fazem a leitura. Depois, verificam o que acontece quando é retirado 1 cubinho do ábaco. Assim, se tivermos no ábaco, por exemplo, 3 barras e 1 cubinho, o resultado será:



UM	C	D	U
0	0	3	1
0	0	3	0

Mas se pedimos às crianças que retirem mais 1 cubinho do ábaco, elas a princípio ficarão em dúvida, pois não há nenhum cubinho disponível no ábaco. Aos poucos, porém, percebem que é possível trocar 1 barra por 10 cubinhos, o que resolve o problema imediatamente.



UM	C	D	U
0	0	3	0
0	0	2	9

Situações semelhantes poderão ser apresentadas aos alunos, de acordo com as necessidades detectadas pelo professor. Por exemplo:

O que acontecerá se precisarmos retirar 1 cubinho nos seguintes casos:

a) Havendo apenas 1 placa ?

b) E se houver 2 placas e 4 barras?

c) E se forem 5 placas?

d) E no caso de haver apenas 1 cubo no ábaco?

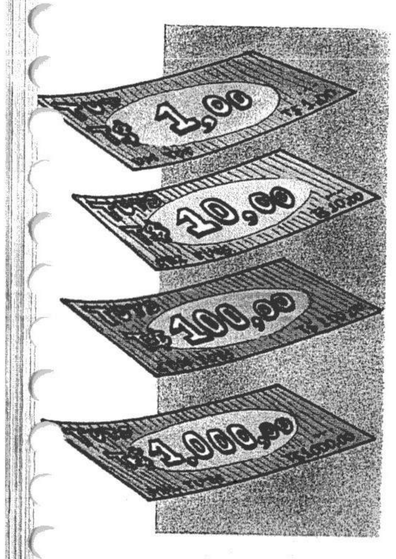
OLHANDO MAIS DE PERTO

1. Em seu ábaco e com o material dourado, execute todas as atividades propostas acima para as crianças. Em grupo, discuta suas impressões sobre as dificuldades que os alunos poderão enfrentar.

2. As atividades desenvolvidas neste capítulo ajudam as crianças a compreender não apenas o sistema de numeração decimal, mas também os algoritmos das diversas operações com números naturais (adição, subtração, multiplicação e divisão). Quais dessas atividades você considera importantes para a compreensão do algoritmo de cada uma das operações?

TROCANDO E AGRUPANDO DINHEIRO

Apenas um tipo de material ou de atividade não é suficiente para que as crianças construam determinado conceito. Por isso, Dienes sugere os *jogos de isomorfismo*, ou seja, aqueles que, embora apresentem aspectos exteriores diferentes, têm a mesma estrutura. Assim, além do material dourado, é conveniente apresentar aos alunos outros materiais que levem ao trabalho de agrupamentos e trocas na base 10. Um material que produz bons resultados, por estar ligado à realidade dos alunos, é o dinheiro.



É recomendável iniciarmos a atividade com um dinheiro "de mentirinha", no qual só haja notas de 1, 10, 100, 1 000 — o que não é o caso do nosso *real*.

Para que as crianças se familiarizem com a "nova moeda", deixe que elas escolham o nome do dinheiro e a cor das notas. Enquanto ajudam a reproduzir (xerox, mimeógrafo, etc.), recortar e pintar o dinheiro, estão se familiarizando com o valor de cada cédula. Aqui, sugerimos *tut*, ou, simbolicamente, T$.

Esse dinheiro de brincadeira poderá ser utilizado numa quermesse. No pátio da escola, organizam-se barracas de jogos (pescaria, argolas). Os alunos estabelecem os preços e cuidam do caixa, que vende as fichas. Cada criança recebe uma nota de T$ 100 para gastar na festa.

Outra possibilidade é montar um "mercadinho" com embalagens vazias trazidas de casa. As crianças colocam preços nos objetos e realizam várias atividades de compra e venda. Aqui

também cada uma delas recebe uma nota de T$ 100. Um dos alunos fica encarregado do "banco", onde os colegas vão trocar dinheiro sempre que necessário.

A professora poderá incentivar o início das transações com atividades envolvendo operações com números naturais e processos de agrupar e trocar, sempre na base 10. Sugestões:

a) Mônica quer comprar uma caixa de sabonetes que custa 7 tuts (T$ 7). Ela só tem uma nota de 10 tuts, e o balconista não tem troco. Que troca ela pode fazer no banco?

b) Lucas quer comprar uma caneta que custa T$ 5 e um estojo de lápis de cor que custa T$ 17. Ele tem três notas de T$ 10. Esse dinheiro é suficiente? Ele receberá troco? De quanto?

c) Um chocolate custa T$ 4. Laura tem uma nota de T$ 10 e quatro notas de T$ 1. Quantos chocolates ela pode comprar com esse dinheiro?

d) Você está com uma nota de T$ 100. Escolha alguns brinquedos no mercadinho, pague e confira o troco.

e) Após várias negociações, a professora poderá dizer: "O caixa da loja está com muito dinheiro! É hora de ir ao banco e trocar as notas por outras de valor maior".

Para finalizar

Usando qualquer um dos materiais sugeridos (fósforos, fichas, material dourado, dinheiro, etc.), os alunos se familiarizam com as regras do sistema de numeração decimal, em vez de simplesmente decorá-las, por meio de exercícios do tipo: "Escreva os números de 1 a 50"; "Escreva os números de 20 a 90"; "Escreva os números de 1 a 100"; ou ainda: "Dê os vizinhos de 36, de 49, de 130...".

A experiência com as séries iniciais do Ensino Fundamental tem mostrado que o trabalho de agrupar e trocar oferece maior autonomia tanto para o aluno quanto para o professor. A passagem de uma dezena para outra vai sendo construída pela criança num contexto significativo e sem a obrigação de decorar regras e nomes que ela não compreende. Quando os alunos trabalham em grupo, o professor tem oportunidade de avaliar melhor a atuação de cada criança, podendo oferecer jogos diversificados aos grupos mais adiantados, enquanto acompanha de perto os alunos que necessitam de maior apoio.

É necessário oferecer aos alunos um tempo maior de familiarização com o sistema de numeração decimal antes de iniciar o estudo dos algoritmos das quatro operações com os números naturais. Esse tempo, que muitos professores podem imaginar como "perdido", com certeza será recuperado na etapa da construção dos algoritmos.

Leitura COMPLEMENTAR

[Avaliação da aprendizagem matemática]

O processo de avaliação envolve o acompanhamento contínuo por parte do professor. As intervenções e registros dos alunos indicam os passos necessários no trabalho de diagnóstico e reorientação do processo de ensino-aprendizagem.

Partimos do pressuposto básico que toda criança deve cursar a escola de primeiro grau. Nesse contexto, a avaliação não é seletiva; ao contrário, é recuperadora, pois deve assegurar a permanência do aluno aprendendo. Como processo de acompanhamento e recuperação ela envolve: diagnóstico, qualificação e reorientação do ensino e da aprendizagem.

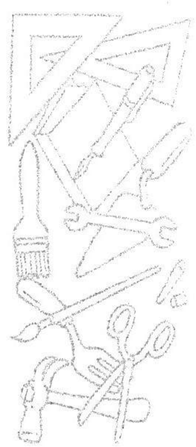
Quando um professor propõe uma atividade, um jogo, um conjunto de exercícios ou uma questão para prova, ele deve ter objetivos e também expectativas. Os alunos, por sua vez, estarão interpretando a proposta e apresentando respostas e resultados. A partir do trabalho do aluno, o professor, antes de tudo, verificará qual foi a interpretação dada e que nem sempre corresponde à sua e, ao mesmo tempo, observará o desenvolvimento do aluno nos conteúdos. Nesse momento, o professor estará fazendo o diagnóstico da aprendizagem do aluno e, ao mesmo tempo, do processo de ensino. [...]

(Nazareth, Helenalda R. S. e Sanchez, Lucília B. Avaliação em matemática nas séries iniciais. *A educação matemática em revista*. SBEM, ano II, n. 3, Blumenau, 1994, p. 51-4.)

Sobre os textos

Você concorda com a afirmação das autoras de que "a avaliação no Ensino Fundamental não é seletiva mas recuperadora"? Discuta essa questão com seus colegas e professor.

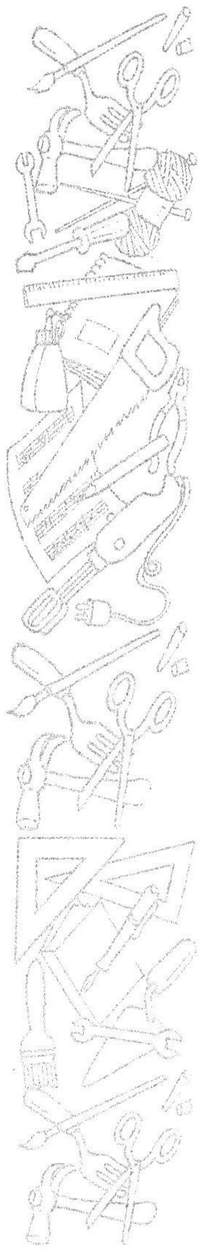
Para você fazer



1. Confeccione "dinheiro" e fichas e, com seu grupo, aplique as atividades de quermesse e/ou mercadinho com as crianças de seu estágio, ou mesmo com um grupo de crianças de suas relações. Observe os procedimentos delas, incentivando-as a comentar suas "negociações" na quermesse.

2. Pesquise em livros didáticos utilizados nas séries iniciais do Ensino Fundamental e verifique:
   a) que tipo de jogos aparecem;
   b) se os jogos são parte integrante do ensino matemático ou se aparecem mais como ilustração ao texto principal;
   c) em relação a quais situações e conceitos os jogos são usados.

3. Resolva as duas situações descritas a seguir.



- Uma doceira enrolou 136 docinhos em um dia e 98 no dia seguinte. Quantos docinhos enrolou nesses dois dias?
- Um funcionário trabalhou durante 2 anos, 7 meses e 15 dias em um emprego, e durante 5 anos, 9 meses e 20 dias em outro. Qual o tempo total de seu trabalho, nos dois empregos?

E, agora, responda:

a) Você usou o mesmo tipo de raciocínio para solucionar os dois problemas?

b) Quais as semelhanças e diferenças entre os procedimentos que você utilizou para resolver cada um deles?

4. Em grupo, discuta a organização de uma ficha de observação, que você usaria para acompanhar o desenvolvimento de seus alunos ao longo de um mês de aulas.
   a) Que informações deveriam ser registradas nessa ficha?
   b) Que procedimentos você usaria para atribuir uma nota ou um conceito a um aluno que foi observado com a ficha e que fez uma prova objetiva?
   c) Considere a sua própria atuação como aluno. Que aspectos você gostaria que fossem levados em conta na atribuição de nota para avaliação de seu trabalho ao longo de um bimestre?

5. Crie um jogo com 30 elementos que devem ser agrupados de 12 em 12, para ser apresentado às crianças.

6. Use fichas e resolva as questões propostas a seguir.
   a) Em um sistema de agrupamentos e trocas, na base 6, indique quantas unidades estão representadas por 1 ficha azul e 2 verdes.
   b) Nesse mesmo sistema, qual é o antecessor do número cuja representação na base 6 é $(3\ 4)_{seis}$?
   c) E o sucessor do número cuja representação na base 6 é $(1\ 2\ 5)_{seis}$?
   d) E os "vizinhos" (antecessor e sucessor) do número representado por $(4\ 0)_{seis}$?

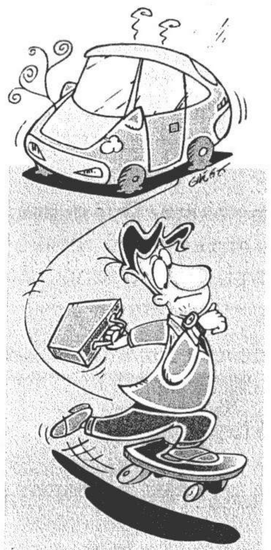
PARA SABER MAIS

Carraher, T. O desenvolvimento mental e o sistema numérico decimal. In:_____ (org.). *Aprender pensando*. Petrópolis, Vozes, 1990.

Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (Cenp). *Atividades matemáticas: ciclo básico*. São Paulo, Secretaria de Estado da Educação, 1993.

_____. *Prática pedagógica: matemática 1º grau*. São Paulo, Secretaria de Estado da Educação, 1993.

Fundação para o Desenvolvimento da Educação (FDE). *Matemática — construtivismo em revista*. Série Idéias. n. 20. São Paulo, Secretaria de Estado da Educação, 1993.



6

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O que é necessário não é a vontade de acreditar, mas o desejo de descobrir, que é justamente o oposto.

Bertrand Russell

Antes de entrar nas operações com números naturais, é importante discutir o conceito de "problema de matemática" e sua utilização no Ensino Fundamental. Muitas vezes, o problema de matemática é usado apenas como exemplo de aplicação das operações. Será que sua função se limita a isso?

A visão do problema

Quando questionado sobre o que é problema, um aluno de 4ª série, de uma escola da periferia de São Paulo, respondeu: "Problema é quando chega a conta de água e a minha mãe não tem dinheiro para pagar". Desse modo, ele traduzia a definição corrente de problema: questão sem solução imediata, difícil de resolver.

Como vemos, uma situação pode ser um problema para uma pessoa e não para outra, dependendo do nível de envolvimento de cada um, da questão sociocultural, da experiência e do conhecimento relacionados àquela situação. Em nossa linguagem comum, interpretamos o termo "problema" como situação desagradável, e não como desafio.

Analogamente, os problemas de matemática muitas vezes são trabalhados de forma desmotivadora, apenas como um conjunto de exercícios acadêmicos. A tarefa do aluno geralmente se resume a descobrir que conta deve fazer para acertar a resolução e, assim, obter uma boa nota. Perde-se com isso o aspecto lúdico que um problema pode ter quando é encarado como um desafio.

Uma das causas da desmotivação é o modo rígido como o problema é apresentado nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Sempre há exatamente todas as informações necessárias para resolvê-lo. Desse modo, todo problema tem uma solução, e essa solução é única.

Outro aspecto é a fórmula que a maioria dos livros didáticos adota para desenvolver os conteúdos. Ao abordar uma operação, por exemplo, os livros sempre seguem a ordem: o conceito, as propriedades, o algoritmo que a resolve e, por fim, uma série de problemas que envolvem essa operação.

Depois de ler e resolver dois ou três problemas, o aluno percebe que não precisa mais analisar os outros enunciados — basta retirar os números do texto e fazer a conta que está sendo tratada naquele capítulo.

Quando o professor cria um problema diferente, os alunos em geral fazem perguntas como: "É conta de mais?", "É problema de duas contas?", etc.

Uma situação ocorrida em sala de aula mostra como as crianças lidam com os problemas. Uma professora havia pedido que cada aluno elaborasse um problema para o colega resolver.

Uma menina apresentou a seguinte questão:

— Um caminhão carregava 786 quilos de areia. Ele sofreu um acidente e perdeu muitos quilos dessa carga. Quanto tem agora?

O colega que deveria dar a resposta reclamou:

— Professora, ela não falou quantos quilos caíram do caminhão.

A menina retrucou:

— Ora, se eu falar ele vai saber dar a resposta.

Como se vê, para essas crianças o problema de matemática parece ser uma espécie de armadilha para a qual elas não vêem possibilidade de resolução. E, realmente, muitas vezes os alunos não conseguem encontrar a solução, apesar de dominarem todos os conceitos e técnicas operatórias envolvidos. Motivos: falta de familiaridade com estratégias apropriadas e ansiedade.

Cabe ao professor criar um ambiente de tranqüilidade, em que o aluno não tenha medo de estabelecer e testar hipóteses, mesmo correndo o risco de errar. É sua tarefa, também, mostrar possíveis estratégias de resolução para os problemas e, ao mesmo tempo, abrir espaço para que a classe discuta os vários métodos encontrados pelos próprios alunos.

Os problemas de matemática devem envolver muito mais aspectos do que a simples aplicação de operações. A educação, como sabemos, deve estar voltada para o desenvolvimento integral do ser humano, tornando-o apto a analisar e criticar o grande volume de informações que recebe, para que possa selecionar aquelas que serão úteis em sua vida diária.

Diante da velocidade dos avanços tecnológicos e científicos, com certeza é mais importante preparar os alunos para aprender coisas novas do que transmitir-lhes um grande volume de informações que em pouco tempo já estarão ultrapassadas.

Em cada área do conhecimento, o especialista tem atitudes e princípios gerais que guiam seu modo de buscar e utilizar as informações — e é isso o que interessa transmitir aos alunos. Trabalhados nas primeiras séries da escolarização, esses elementos constituirão o instrumental básico para que o estudante aprenda a lidar com cada tipo de conhecimento. Nesse sentido, em matemática a resolução de problemas é fundamental.

Atualmente, muitos educadores matemáticos se preocupam com a *heurística,* ciência voltada para a resolução de problemas, cujo principal pesquisador foi o russo George Polya. Seu livro *A arte de resolver problemas,* publicado em 1945, é até hoje uma referência fundamental para os estudiosos do assunto.

Tipos de problemas

Vejamos, agora, alguns tipos de problemas que podem surgir no cotidiano da sala de aula e as estratégias de trabalho envolvidas em cada um deles.

Arme e efetue

Problemas desse tipo constituem simples treino de técnicas operatórias e de memorização de tabuada. É claro que os alunos precisam saber como encontrar os resultados dos cálculos que estão realizando, mas esse trabalho tem sido feito cada vez mais pelas calculadoras, o que relativiza a importância desse tipo de problema. Na verdade, o "arme e efetue" nem pode ser classificado como problema, pois em geral não estimula o aluno a se empenhar na busca da solução.

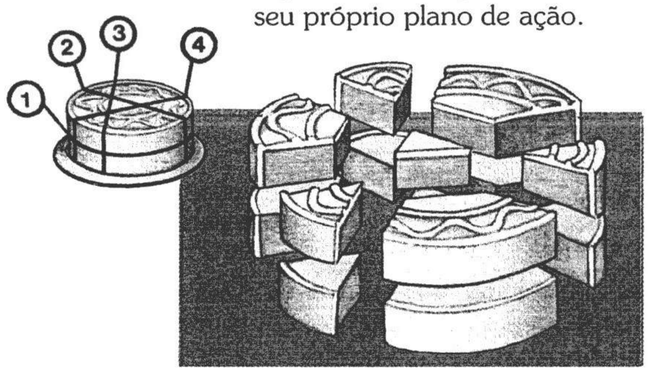
Problemas de enredo

São problemas tradicionais envolvendo as operações que estão sendo estudadas no momento. Desenvolvem no aluno a capacidade de traduzir em expressões matemáticas as situações descritas em linguagem comum. Além de constituir um treino do uso de algoritmos, ajudam-no a aprofundar as idéias ligadas a cada uma das operações, uma vez que precisa descobrir quais delas se adaptam à situação apresentada. Um exemplo: "Marcos tinha 5 caixas de bolinhas de gude, cada uma com meia dúzia de bolinhas. Numa competição, perdeu 13 bolinhas. Com quantas ficou? Com as bolinhas que sobraram, quantas caixas poderiam ser formadas?".

Problemas não-convencionais

Desenvolvem no aluno a capacidade de planejar, elaborar estratégias gerais de compreensão do problema, tentar soluções e avaliar a adequação do raciocínio desenvolvido e os resultados encontrados. O processo de resolução envolve, em maior ou menor grau, a coordenação de experiências anteriores, conhecimentos acumulados e intuição.

Quando estão livres da obrigação de "fazer contas para achar a resposta", os alunos se sentem mais à vontade para seguir sua intuição, tentar adivinhar, "chutar", procurar regularidades ou regras de formação de padrões. Enfim, conseguem organizar seu próprio plano de ação.



Um exemplo de problema não-convencional: "Como podemos, com apenas 4 cortes retos em um bolo redondo, obter o maior número possível de pedaços?". (Os pedaços não precisam ser do mesmo tamanho.)

Resposta: 14 pedaços

Problemas de aplicação

Esse tipo de problema é elaborado a partir de uma situação de vivência dos alunos, e a solução requer o uso de conceitos, técnicas e processos matemáticos. Desse modo, os alunos se conscientizam da utilidade da matemática na vida cotidiana.

Numa região cuja economia depende de determinado tipo de cultura, por exemplo, o professor pode pedir que os alunos pesquisem e calculem dados como: a produção ideal por alqueire; a quantidade de adubo necessária; as despesas totais da produção (plantio, adubação, colheita e transporte); o preço que se deve cobrar para pagar as despesas e obter lucro; a comparação entre esses preços e os que estão sendo cobrados na realidade.

Problemas de aplicação são especialmente importantes no currículo, pois envolvem obrigatoriamente a integração de disciplinas, tão enfatizada e tão pouco praticada. Isso porque um problema desse tipo exige:

- conhecimentos específicos sobre o assunto envolvido no problema;
- coleta de informações;
- organização dos dados obtidos;
- construção e análise de tabelas e gráficos;
- cálculos que envolvem diferentes unidades de medida;
- avaliação dos resultados;
- elaboração de um relatório final, com as conclusões.

Sem dúvida, o sucesso de um trabalho baseado na resolução de problemas depende do professor. Cabe a ele preparar os alunos para as atividades, estar alerta para situações novas que possam surgir no dia-a-dia da escola, conhecer os interesses dos estudantes, saber diagnosticar o nível de conhecimento e as habilidades de seus alunos (para nunca propor problemas muito acima ou abaixo desse nível), além, é claro, de envolver-se com as questões propostas.

Muitos professores, mesmo reconhecendo o valor desse tipo de atividade, não se encorajam a realizá-la simplesmente por não terem experimentado essas situações em seu tempo de estudantes. Mas a experiência só vem com a prática! À medida que for trabalhando e trocando experiências com seus colegas, o professor conseguirá propor perguntas que ajudem os alunos a desenvolver o raciocínio e criar situações cada vez mais interessantes. Com o tempo, ele poderá construir seu próprio "banco de problemas" para estimular os alunos a pensar.

Ensinando a resolver problemas

Em suas brincadeiras e atividades do dia-a-dia, as crianças realizam intuitivamente operações com quantidades de objetos: elas juntam seus brinquedos aos de seus amiguinhos, repartem igualmente certa quantidade de balas, dão algumas de suas figurinhas ao colega, comparam suas coleções de carrinhos, fazem agrupamentos com quantidades iguais de peças de um quebra-cabeça, etc.

No entanto, como se encontram, segundo Piaget, no período pré-operatório (por volta dos 6 anos) ou operatório-concreto (dos 7 aos 12 anos), elas só são capazes de realizar operações agindo sobre os objetos em situação nas quais estejam envolvidas.

O grande desafio pedagógico consiste em prepará-las para que consigam traduzir essa ação em uma linguagem que usa símbolos próprios (+, −, ×, ÷, etc.).

É fundamental, portanto, incentivar a criança a resolver situações simples do cotidiano da classe, a verbalizar suas ações, discuti-las com os colegas, fazer cálculos mentais e verificar as diferentes estratégias utilizadas pelas outras crianças diante da mesma situação. Vejamos alguns exemplos:

a) "Pegue no armário da classe uma quantidade de lápis suficiente para dar um a cada participante de seu grupo."

b) "Organizem a classe em equipes de 5 alunos para realizarmos uma competição."

c) "Há 5 crianças em volta desta mesa, mas cabem 8; vamos completar o grupo?"

d) "Nesta caixa há 10 lápis, mas só precisaremos de 6; o que vamos fazer?"

Tudo a seu tempo

Muitas crianças de 1ª série, e até de pré-escola, resolvem "de cabeça" problemas que implicam adição e alguns casos de subtração — não só os problemas práticos, mas também aqueles que têm histórias, principalmente quando ligadas a seus focos de interesse. No entanto, quando se pede que expliquem como acharam o resultado, elas respondem de modo evasivo: "Fiz na minha cabeça" ou "Fiz porque é assim". Comportamentos desse tipo demonstram que cobrar da criança uma representação simbólica do seu raciocínio é ainda muito prematuro nessa fase.

Referindo-se aos programas de 1ª série, Kamii e DeClark (1986: 139) afirmam que:

> A grande falha do ensino tradicional é a ênfase dada às técnicas e sinais convencionais, em vez de desenvolver a própria capacidade de raciocínio da criança. [...] Eu acho que o objetivo, tanto na subtração como na adição, deveria ser o de incentivar as crianças a pensar e a lembrar dos resultados de seu próprio raciocínio, e não simplesmente ensinar-lhes técnicas específicas para darem respostas escritas.

Assim, o professor só deverá exigir respostas escritas para os problemas e a representação das operações quando perceber maturidade suficiente em seus alunos — o que ocorre por volta do início da 2ª série do Ensino Fundamental.

Lendo e entendendo

O trabalho inicial consistirá em criar condições para que os alunos analisem o problema-texto e o discutam com os colegas, representando-o por meio de dramatizações, modelos com material de manipulação, ilustrações, esquemas, etc. Para isso, é extremamente importante a capacidade de criar a imagem mental de uma história a partir de uma figura ou diagrama. Aqui, o professor pode ajudar os alunos a desenvolver essas condições por meio de uma série de atividades como:

a) contar uma história para as crianças, pedindo-lhes que ouçam com atenção e imaginem o lugar, a figura da personagem, suas roupas, seus movimentos, etc.;

b) formar grupos para as crianças dramatizarem a história, improvisando roupas, cenários, etc., com materiais da classe;

c) formar grupos para representarem a mesma história por meio de desenhos ou recortes e colagens;

d) apresentar uma figura e pedir às crianças que, em dupla, criem uma história a respeito.

A caminho da solução

Uma vez que os alunos sejam capazes de compreender o texto de um problema, passa-se à etapa da busca de soluções. Para isso, há também uma série de procedimentos que devem tornar-se familiares à criança: reler o problema, sublinhando a pergunta; verificar se o problema tem informações suficientes para ser resolvido e se tem informações desnecessárias; listar as informações importantes do problema; fazer uma figura, um esquema ou uma representação com material de manipulação.

Algumas atividades podem ajudar a preparar a classe para esse tipo de trabalho:

a) pedir aos alunos que organizem listas de lugares onde costumam ver números (ônibus, elevadores, televisão, placas das casas, etc.) e depois discutir sua função nesses locais;

b) contar uma história e pedir que as crianças a recontem com suas palavras; fazer perguntas sobre a história; depois, pedir que os alunos criem suas próprias perguntas, sobre a mesma história, para os colegas responderem;

c) contar apenas o começo de uma história e sugerir que inventem um final;

d) contar uma história curta, que contenha detalhes muito importantes e outros que não influem nos acontecimentos; pedir que os alunos identifiquem as informações importantes e as supérfluas;

e) contar uma história e pedir que digam o que teria acontecido se determinado fato tivesse sido diferente.

Compartilhando o raciocínio

Compreendida a situação, o caminho para resolvê-la se torna bem mais fácil. É interessante, depois de cada criança ter procurado sozinha uma solução, formar duplas para discutir as idéias e estratégias utilizadas. Esse trabalho ajuda o aluno a expressar claramente seus pensamentos, defender opiniões, entender o ponto de vista das outras pessoas.

Durante a troca de informações, o professor deve observar as duplas, mas nunca apresentar a solução do problema. É importante acompanhar as discussões, fazendo perguntas que direcionem os alunos no sentido de perceber possíveis erros no encaminhamento do raciocínio.

Descoberta a solução, algumas duplas apresentam as estratégias que adotaram, representando à sua maneira o caminho percorrido para resolver o problema. Só então é possível começar o trabalho com representação formal por meio de símbolos matemáticos.

Para os alunos de fases mais adiantadas (a partir da 3ª série) podem ser sugeridas novas estratégias de resolução de problemas:

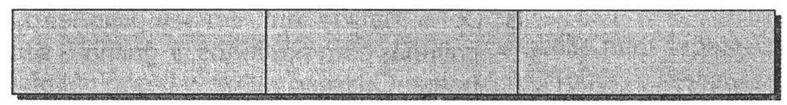
- resolver um problema semelhante mas com valores menores;
- resolver um problema análogo mais simplificado;
- trabalhar de trás para frente, isto é, a partir da solução do problema;
- "chutar" uma resposta e testá-la;
- procurar uma seqüência e depois generalizá-la.

Sugestões de problemas

Partindo sempre da estratégia de explorar nos problemas o interesse das crianças em descobrir segredos, resolver enigmas e brincar de detetive, o professor pode trabalhar com várias possibilidades.

I – Misturar situações-problema que envolvem operações e outras que não envolvem.

1. Quantos retângulos há na figura?



2. Com notas de 1, 5, 10, 50 e 100 reais, forme 120 reais de várias maneiras:

a) como desejar;

b) com a menor quantidade possível de notas;

c) com a maior quantidade possível de notas;

d) com 5 notas;

e) com 8 notas.

3. Três irmãos fizeram um trabalho e receberam, juntos, R$ 540,00, que repartiram igualmente. Luís deu R$ 40,00 para a mãe e ficou com o resto; Maria comprou uma bolsa por R$ 45,00 e um vestido por R$ 56,00 e deu o resto para a mãe; Pedro deu metade para a mãe e ficou com o resto. Quanto cada uma das quatro pessoas tem agora?

4. Três amigos, Miguel, André e João, têm barracas vizinhas na feira. O que vende peixe não é vizinho do que vende frutas. As verduras que João vende são do sítio de seu pai. As laranjas que André trouxe hoje para vender estão fresquinhas. Faça uma planta da feira, escrevendo o nome dos donos das barracas e o que elas vendem.

5. Marquinhos quer comprar um ioiô e uma bola. Como ele pode saber se o seu dinheiro vai dar para fazer as compras?

II – Em meio aos problemas tradicionais, propor alguns que contenham informações desnecessárias (para que o aluno selecione os dados importantes) e outros em que faltem informações.

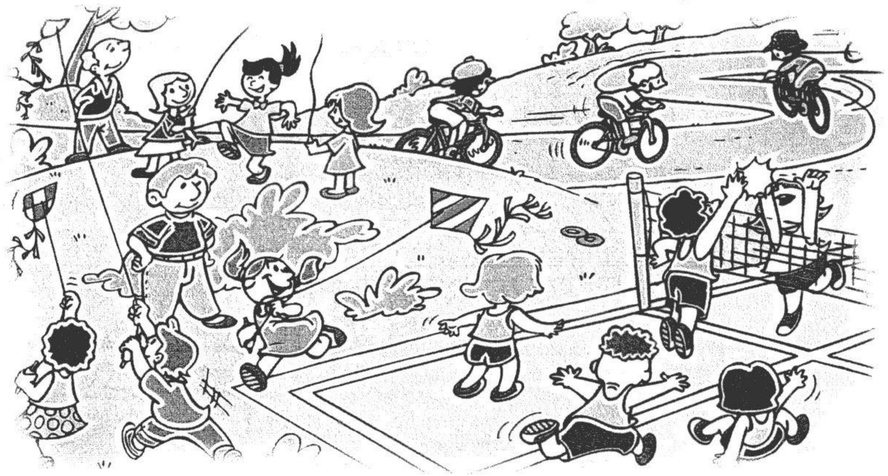
6. Na sala de brinquedos do pré há 3 bonecas, 5 caixas de quebra-cabeças, 8 carrinhos, 4 jogos de panelinhas e 5 cordas de pular. Quantas bolas há na sala? Que brinquedo há em maior quantidade? E em menor quantidade? Quantos desses brinquedos servem para brincar de casinha? Explique como eles são usados na brincadeira.

7. Três amigos entraram numa lanchonete. Jorge gastou R$ 5,00; Ana gastou menos que Jorge; Pedro gastou o mesmo que Ana. Quanto os três gastaram no total? Você acha que R$ 15,00 serão suficientes para pagar tudo? Se Pedro e Ana derem R$ 10,00 para pagar sua parte, irão receber troco?

8. Dona Matilde tem, em seu galinheiro, 2 gansos, 3 galos, 5 galinhas com pintinhos, 7 galinhas sem filhotes, 6 perus e 8 patos. Quantas galinhas há no galinheiro?

III – Apresentar diferentes veículos de informação: catálogos de preços, ilustrações, histórias em quadrinhos, etc.

9. Observe a ilustração seguinte e depois responda:



a) Quantas crianças estão brincando no parque?

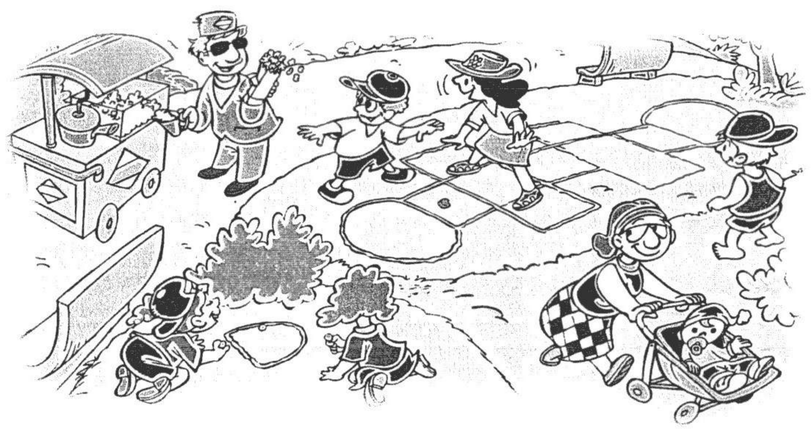
b) Quantos tipos de brincadeiras são ao todo?

c) Há mais meninas ou meninos?

d) Em qual das brincadeiras há mais gente?

e) Quantos adultos estão no parque?

10. Que delícia! O pipoqueiro sorteou um saquinho de pipoca entre as crianças do parque. Vamos tentar adivinhar quem ganhou?



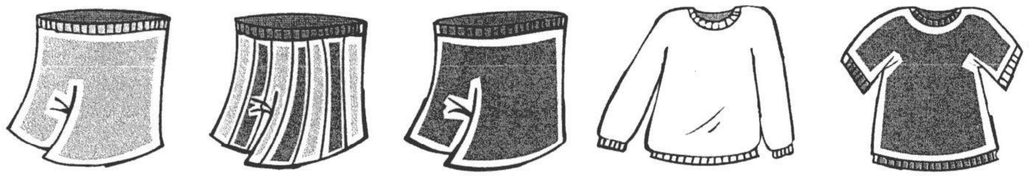
Preste atenção nas dicas sobre a criança vencedora:

a) Não está jogando bolinha de gude.

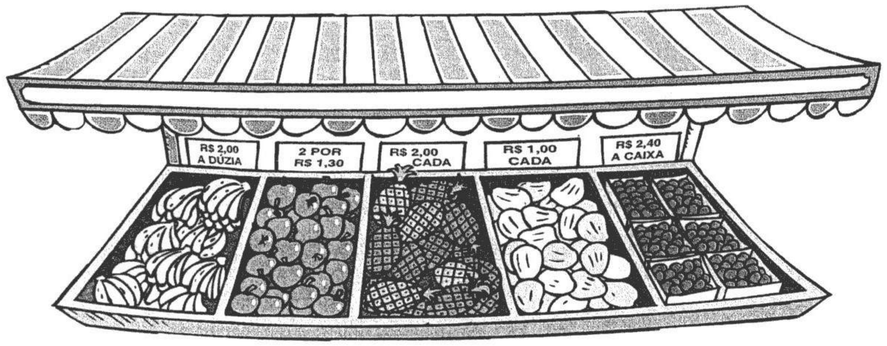
b) Não está descalça, mas não usa sandália nem sapato.

c) Está de cabeça coberta, mas não usa boné nem chapéu.

11. Veja as peças de uniforme que o time do Arranca-Toco Futebol Clube tem. Quantos uniformes diferentes podemos formar com essas peças?



12. Observe a banca de frutas e responda:

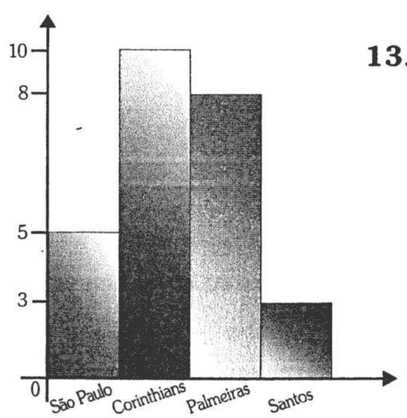


a) O que você pode comprar com R$ 30,00? Vai sobrar troco?

b) E se você quiser comprar meia dúzia de bananas, 4 maçãs, 3 abacaxis e 1 mamão, quanto vai gastar?

c) O dono da banca está gritando: "Leve 3 caixas de morango e pague 7 reais". É vantagem ou não?

Esse mesmo problema pode ser apresentado para crianças que ainda não trabalham com números decimais; basta que os preços sejam números inteiros.



13. O gráfico ao lado representa o resultado de uma votação realizada numa classe de 2ª série sobre o time de futebol preferido dos alunos. Observe-o e responda:

a) Qual foi o time mais votado?

b) E o menos votado?

c) Quantos votos teve o Corinthians?

d) Qual o total de votos da classe?

14. Peça aos alunos que façam uma pesquisa de opinião, na própria classe ou em outras classes, sobre um assunto de interesse da escola no momento. Coloque os dados em um gráfico de barras.

15. Apresente uma lista de preços dos lanches e dos produtos vendidos na lanchonete da escola. Peça aos alunos que criem problemas a partir dessa lista.

IV – Apresentar problemas que podem ter diferentes encaminhamentos de soluções.

16. Um tijolo pesa 1 quilo mais meio tijolo. Quanto pesa um tijolo e meio?

17. Um homem precisa atravessar um rio levando uma galinha, uma raposa e um saco de milho. Porém, o único barco disponível só pode carregar dois elementos em cada viagem — ele e um de seus pertences. O homem fica em dúvida: se deixar a galinha com o milho, a galinha come o milho; se deixar a raposa com a galinha, a raposa come a galinha. Qual é a saída?

18. Três pessoas querem dividir igualmente 30 garrafas, das quais 10 estão cheias, 10 têm líquido até a metade e 10 estão vazias. As pessoas querem receber a mesma quantidade, tanto de garrafas quanto de líquido. De que maneira isso pode ser feito?



COMPLEMENTAR

1. [Questionar as próprias questões propostas]

Acredito que o aprender matemática só está realizado no momento em que o aluno é capaz de transformar o que lhe ensinarmos e de criar a partir do que ele sabe. Caso essa autonomia de transformação e criação não exista, o que se tem é o aluno meramente adestrado, repetindo processos e resoluções criados por outros. [...]

O ensino deve ser tal que a cada problema o aluno seja exposto a questões do tipo: Por que esse problema foi resolvido assim? Há outros modos de se chegar a essa resposta? Qual o melhor processo para se resolver esse problema? Que outras questões podem ser levantadas a partir do que é dado? Se alguma questão não pode ser resolvida com os dados que se tem, como alterá-los ou completá-los para que se chegue a uma resposta? Como algumas modificações nos dados podem interferir na resposta?, etc. Até o momento em que o aluno tenha autonomia para se colocar questões desse tipo e outras de maior complexidade, extrapolando as fronteiras dos conteúdos e da sala de aula.

(DINIZ, M. Ignez de S. V. Uma visão do ensino de matemática. *Temas & Debates*, Rio Claro, SBEM, ano IV, n. 3, p. 27-30.)

2. [Aprender a aprender com os próprios erros]

Uma certa atmosfera de mistério e até mesmo de magia cerca o primeiro contato de alguém com o computador. Embora sabido que se trata apenas de uma máquina com circuitos, teclas, etc., há algo no computador que o faz parecer não só quase vivo, mas também inteligente. A primeira coisa que o aprendizado de programação demonstra é que o computador só faz aquilo que é ensinado a fazer. Sem um programa, e portanto sem um programador, o computador é um perfeito idiota, que, entretanto, tem uma excelente memória e uma capacidade servil de executar ordens com precisão e rapidez. No processo de aprender esse fato essencial acerca do computador, a criança aprende quem dá ordens a quem, quem é que ensina e instrui, quem é que está no controle.

Essa descoberta, juntamente com a de que o computador não irá resolver nenhum problema que não se consiga resolver para ele, ajuda a criança a desenvolver a autoconfiança — autoconfiança advinda do fato de que ela é capaz de fazer uma máquina poderosa e até misteriosa obedecer às suas ordens. Trata-se de uma sensação essencial, especialmente para as crianças que têm um grau relativamente baixo de autoconfiança, porque, em uma sociedade cada vez mais permeada pela tecnologia, é de importância vital que as pessoas, sobretudo as crianças, se convençam de que são elas que devem, mesmo porque podem, controlar as máquinas — e não vice-versa.

A segunda vantagem do ensino de programação consiste no fato de que aprender a programar o computador desenvolve uma série de habilidades e estratégias para a solução de problemas — de problemas bastante reais.

Embora as pessoas aprendam a solucionar problemas e a desenvolver certas estratégias para fazê-lo simplesmente vivendo suas vidas, ou na "escola da vida", como dizem alguns, parece ser terrivelmente difícil, até mesmo quase impossível, ensinar, na escola propriamente dita, métodos e técnicas de solução de problemas. As razões dessa dificuldade provavelmente se relacionam com a diversidade das habilidades e dos conhecimentos e com a profundidade da compreensão que são exigidos para a solução dos problemas — bem como com a complexidade inerente à avaliação das estratégias utilizadas no processo de solução.

As escolas, em geral, preferem concentrar-se em habilidades que podem ser facilmente identificadas, isoladas, medidas e avaliadas, a dedicar-se àquelas menos tangíveis e mais profundamente inter-relacionadas. [...]

Computadores fornecem um contexto cheio de problemas excitantes e atraentes para as crianças e as desafiam a solucioná-los. Até mesmo as mais elementares tarefas de programação propostas para crianças e principiantes (como desenhar ou escrever na tela) são suficientemente ricas e complexas para ajudar no desenvolvimento de uma série de habilidades essenciais no processo de solução de problemas. [...]

Esse processo contínuo de descrição do problema, proposta de uma solução, teste de solução, revisão, novo teste, etc. é de enorme valor pedagógico, pois incorpora o cerne do método científico — através dele *a criança aprende a aprender através de seus próprios erros.* Dessa forma, e nesse contexto, o erro, ao invés de ser visto puramente como evidência de fracasso, reveste-se também de significado pedagógico positivo, tornando-se um desafio à criatividade, à inteligência, à engenhosidade e, por que não dizer, também à paciência e à perseverança. O erro torna-se, portanto, mais uma oportunidade de aprender.

Finalmente, o terceiro tipo de benefício resultante do aprendizado de programação traduz-se como um acréscimo de conhecimento a respeito do objeto do programa. Todos os educadores já tiveram a experiência de que, ao ensinar um determinado conteúdo, freqüentemente aprendem ainda mais sobre ele. [...] Isso se aplica a qualquer assunto, e é

aqui que a utilização do computador na educação se relaciona com os conteúdos do currículo: estes não são pacotes de informações a serem absorvidos, mas matéria-prima a ser trabalhada pelo aluno em suas tentativas de solucionar problemas reais e concretos.

(CHAVES, Eduardo O.C. e SETZER, Valdemar W. *O uso de computadores em escolas: fundamentos e críticas.* São Paulo, Scipione, 1988. p. 27-30.)



a) Observe uma aula de matemática de 3ª ou 4ª série e, sob o enfoque dado por Diniz em seu artigo, analise o comportamento dos alunos e do professor durante a resolução de problemas.

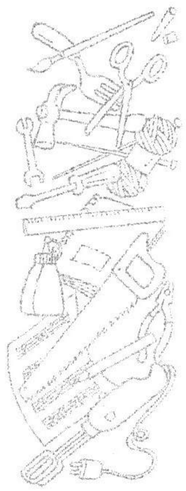
b) Faça uma pesquisa sobre a importância do uso do computador e das máquinas de calcular na resolução de problemas matemáticos. Depois de ler "Aprender a aprender com os próprios erros", procure trocar idéias com professores que já estejam utilizando o computador como um de seus instrumentos para ensinar.

Para você fazer



1. Resolva as questões sugeridas no capítulo (páginas 89 a 93). Depois, discuta em grupo:
   a) a solução que cada um encontrou;
   b) para que nível de aluno cada problema é mais adequado.
2. Reúna duas ou três crianças e apresente a elas alguns dos problemas sugeridos no capítulo. Tente criar um ambiente de desafio, de jogo. Observe as reações das crianças.
3. Pesquise, em livros didáticos, revistas de charadas e quebra-cabeças, alguns problemas interessantes. Discuta-os em grupo.
4. Resolva os problemas a seguir, procurando usar algumas das estratégias sugeridas no texto.
   a) Três amigos ganharam fichas valendo dinheiro, para gastar em uma quermesse. Ao verificar que as quantias eram diferentes, resolveram fazer trocas de fichas, para ficar com quantias iguais, continuando cada um com três fichas. Ajude-os a fazer as trocas com o menor trabalho possível.





b) Pedro foi comprar balas. As de frutas vêm embaladas em pacotinhos de 3 unidades, e as de hortelã, embrulhadas de uma em uma. Se ele voltou com um total de 20 balas, quantas de cada tipo ele comprou?

c) Ana, Beatriz e Carmem estão jogando. A regra para a contagem dos pontos da competição é a seguinte: a partir das fichas iniciais que cada jogador comprou, o primeiro que for eliminado de uma rodada deverá dobrar a quantidade de fichas que cada um dos outros dois tem naquele momento.
Na primeira rodada, Ana perde e paga às outras duas. Na segunda rodada, é Carmem quem perde e também dobra a quantia de fichas que Ana e Beatriz têm no momento. Verificam, então, que cada uma está com 8 fichas. Quem perdeu mais dinheiro?

PARA SABER MAIS

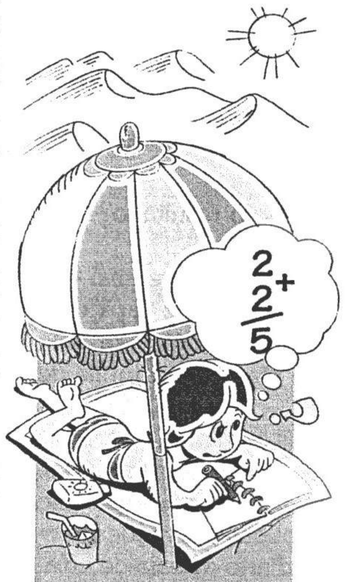
DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas*. São Paulo, Ática, 1989.

TAHAN, Malba. *O homem que calculava*. Rio de Janeiro, Record, 1989.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro, Interciência, 1978.

ZUNINO, D. L. de. *A matemática na escola: aqui e agora*. Porto Alegre, Artes Médicas, 1995.

LOPES, A. V. et al. *Actividades matemáticas na sala de aula*. Lisboa, Texto, 1992.



7

OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS

Tudo em volta está deserto, tudo certo.
Tudo certo como 2 e 2 são 5.

Caetano Veloso

Conta "de cabeça"

"O cálculo mental deve ser incentivado ou não?", "Ao fazer cálculos 'de cabeça', os alunos não se desinteressam pelos algoritmos tradicionais?", "Como se ensina um aluno a fazer cálculo mental?". Essas dúvidas são comuns entre professores do Ensino Fundamental, e o assunto causa muita polêmica.

Crianças acostumadas a confiar apenas em resultados encontrados com a utilização dos algoritmos "aprendidos" nas aulas às vezes passam até a não confiar mais na própria capacidade de raciocinar, demonstrando insegurança no momento de resolver problemas. O diálogo abaixo é um exemplo. Ao fazer 210 ÷ 2, um aluno encontrou o resultado 15. Na tentativa de fazê-lo perceber e corrigir seu erro, o professor perguntou:

— Qual é a metade de 200?
— É 100, professor.
— Então, a metade de 210 é maior ou menor que 100?
— Lógico que é maior!
— E por que você está colocando 15 como resultado?
— Não sei. A conta está dando isso!...

Crianças que utilizam o cálculo mental com o incentivo dos professores, ao contrário, desenvolvem — além de rapidez e exatidão nos resultados — muita segurança psicológica, grande criatividade nas atividades com números e maior autonomia de raciocínio na resolução de problemas.

Quanto maior a familiaridade dos alunos com números, mais capazes serão de estabelecer relações e descobrir propriedades. Desde a pré-escola a criança precisa ir desenvolvendo o cálculo mental, antes mesmo da abordagem formal das operações com números naturais. A todo instante, no cotidiano da sala de aula, surgem boas ocasiões para incentivar o pensamento numérico. O professor pode apresentar questões como: "Pegue sanduíches para todos do seu grupo"; "Na caixa há mais bonecos ou carrinhos?"; "Você tem 3 folhas de desenho, se pegar mais 2, com quantas vai ficar?".

Nas situações de jogo, é importante que o professor peça às crianças que elas próprias organizem as equipes, discutam e definam as regras do jogo, providenciem material suficiente para seu grupo, estabeleçam a ordem de jogada de cada um e contem os pontos obtidos pelos participantes.

Na "dança das cadeiras", por exemplo — uma brincadeira que pode ser trabalhada com crianças de 1ª série —, 5 crianças dançam em volta de 4 cadeiras; quando a música pára, elas têm de sentar; quem sobrar sai do jogo e retira-se uma cadeira. O restante da classe observa e aguarda sua vez no revezamento.

Depois de algumas rodadas, o professor organiza uma mudança: 7 crianças e 7 cadeiras. E assim que o jogo começa as crianças reclamam: "Assim não tem graça". Então, o professor pede sugestões para que a brincadeira volte a ficar interessante.

As crianças se envolvem, discutem e até criam novas regras para o jogo.

Com esse tipo de atividade, os alunos poderão exercitar:

- o raciocínio e a capacidade de argumentação, para defender seu ponto de vista;
- a capacidade de análise crítica, ao examinar os diversos encaminhamentos de soluções;
- a criatividade, na elaboração de novas regras para o jogo;
- a autonomia defendida por Piaget, "que é, indissociavelmente, social, moral e intelectual" (KAMII, 1984).

Sugestões de atividades

Muitas situações do cotidiano podem ser exploradas para desenvolver o cálculo mental. Vejamos algumas propostas.

a) "Será que a gente consegue descobrir se hoje vieram todos os alunos da classe sem fazer a chamada? Como? Quem tem alguma idéia? Vamos discutir as sugestões?"
b) "Hoje há mais meninas ou meninos na classe? Por quê?"
c) "Tenho 10 potinhos de guache. Será que vai dar para distribuir 3 potinhos para cada uma destas 3 crianças?"
d) "Vamos colocar 4 crianças em cada banco. Quantas crianças estão na classe? Quantos bancos devemos pegar?"
e) "Você tem 8 lápis de cor e seu colega tem 12. Quantos ele deve me dar para vocês ficarem com a mesma quantidade? Existe outro modo de vocês ficarem com a mesma quantidade?"

Outras atividades possíveis são: jogos em que há contagem de pontos; ou aqueles em que há diversos valores em questão (como dados, pega-varetas, forca, mico, etc.); atividades de compra e venda, como planejar e realizar a compra de lanches para a classe levar a uma excursão; atividades simulando essas mesmas operações, como organizar lojinhas ou mercadinhos com embalagens vazias de produtos.

Vários métodos

Ao trabalhar com cálculo mental, o professor deve levar em consideração os vários tipos de raciocínio que podem conduzir ao mesmo resultado. Por exemplo, diante da questão "Eu tinha 500 reais e já gastei 236. Quanto tenho agora?", um grupo de pessoas com certeza fará diferentes cálculos mentais.

Se fora da escola nem sempre seguimos os modelos aprendidos em aula, por que esperar isso dos alunos?

No exemplo citado, que envolve subtração, não se pode afirmar que ela tenha de ser feita "de cima para baixo" ou de "baixo para cima"...

O professor não pode ser rígido, como se só existisse *um* modo de fazer um cálculo.

Um passeio pela história dos símbolos

Um dos mais antigos documentos matemáticos que nos foram legados pelos egípcios é o Papiro Rhind, datado de cerca de 1650 a.C. Trata-se de um rolo com aproximadamente 30 cm de largura por 5 m de comprimento, assinado por um escriba de nome Ahmes e por isso conhecido também como Papiro Ahmes.

Em 1858, esse documento foi comprado, numa cidade à beira do rio Nilo, por um antiquário escocês chamado Henry Rhind. Encontra-se em exposição no British Museum, em Londres. Nele estão registrados vários problemas do dia-a-dia daquele povo, entre os quais alguns sobre distribuição de mantimentos, que estão resolvidos por equações simples. A adição é indicada por pernas humanas caminhando em um sentido; a subtração é representada pelas mesmas pernas, mas caminhando no sentido contrário.



O matemático grego Diofante(325-410 d.C.) adotou o símbolo ao lado para a subtração.



Na Europa, na Idade Média, os comerciantes usavam a conjunção latina *et* ("e") para indicar a adição, e a palavra latina *minus* ("menos") para a subtração. Aos poucos, essas palavras foram sofrendo abreviações, até chegar aos signos que hoje utilizamos, e que já não têm nenhuma conexão com as operações que representam (acredita-se que o sinal + saiu do *t* da palavra *et*, e o sinal menos "evoluiu" da letra *m* de *minus*, escrito cada vez mais apressadamente).



Já na Renascença, o calculista Tartaglia (1499-1557) usava o símbolo ao lado, que era a primeira letra da palavra italiana *più* ("mais", em português), para indicar uma adição.

Em 1514, o matemático holandês Hoecke usou pela primeira vez os signos + e − em expressões matemáticas.

Quanto ao sinal de igualdade, parece que, por muito tempo, o único povo a utilizá-lo foi o egípcio, com o significado de "isto dá". O sinal =, que tanto pode representar "isto dá" como "é igual a", só veio a ser criado no século XVI, e mesmo assim levou cerca de 100 anos para ser aceito e utilizado.

O sinal ×, para a multiplicação, aparece pela primeira vez em um livro publicado em 1631. Ainda no século XVII, surge o ponto entre dois números, com o mesmo significado. Descartes usava o sinal × para indicar a multiplicação e o sinal ÷ para a divisão.

As formas $\frac{a}{b}$ ou a/b, indicando divisão, são de origem árabe. Foi também no século XVII que apareceu a notação a÷b.

I. Adição

A adição é a operação mais natural na vida da criança, porque está presente nas experiências infantis desde muito cedo. Além disso, envolve apenas um tipo de situação, a de "juntar" (ou "acrescentar"), que é afetivamente prazerosa (quem não gosta de juntar, ganhar ou colecionar coisas?).

Essa familiaridade dos alunos com a adição facilita muito o trabalho pedagógico, que consistirá basicamente em planejar situações adequadas ao estágio em que eles se encontram.

Como trabalhar a adição

Inicialmente, devem ser utilizadas situações práticas que contribuam para que o aluno construa os resultados das adições com todas as combinações possíveis dos números naturais de zero a 9. Aos poucos, ele irá memorizar esses resultados — conhecidos como *fatos fundamentais da adição*, porque são usados em qualquer soma de números naturais.

Além disso, as atividades deverão ajudar o aluno a descobrir propriedades, como a *comutativa* e a *associativa*, ou o fato de o zero funcionar como elemento neutro na adição. Essas descobertas, obviamente, são realizadas pelas próprias crianças em suas experiências com os números, sem que seja necessário saber o nome de cada propriedade.

As operações sempre devem ser apresentadas como parte de uma situação de classe ou do cotidiano da criança — colecionar materiais, organizar os livros do "cantinho de leitura", formar grupos com um certo número de participantes, contar pontos em jogos, etc. São atividades bem mais envolventes que uma lista de contas para o aluno resolver ou tabuadas para decorar.

As situações devem ser planejadas e envolver números fáceis de trabalhar. Segundo pesquisas de Kamii e DeClark (1986: 111), a seqüência mais adequada é:

- parcelas até 4;
- parcelas até 6;
- parcelas iguais;
- somas já conhecidas e o total auxiliar 10;
- uso intuitivo da propriedade associativa da adição, isto é, para encontrar o resultado de 7 + 6, por exemplo, os alunos fazem primeiro 7 + 3 = 10 e depois 10 + 3 = 13, pois sabem que 6 = 3 + 3; logo, 7 + 6 = 7 + (3 + 3).

Kamii alerta para dois fatos importantes:

Em primeiro lugar, as crianças que são encorajadas a procurar esse tipo de relação entre os números, reagrupando parcelas para encontrar a soma, sempre terão muito mais facilidade com cálculos do que aquelas que só sabem somar números utili-

zando a contagem. Para somar 7 + 6, por exemplo, fazem 7 + 1 = 8, 8 + 1 = 9... e continuam acrescentando 1 até chegar ao 13.

Nas palavras de Kamii, "contar é um meio de se obter cada resposta separadamente, sem colocá-la em relação com o conhecimento anterior. O reagrupamento mental, ao contrário, é um meio de produzir um conhecimento novo em relação ao que já se sabe" (1986: 115).

Em segundo lugar, a criança só incorpora a idéia de comutatividade por volta dos 7 ou 8 anos. Muitos professores, baseando-se na lógica dos adultos, acham natural dizer aos alunos que "5 + 3 é igual a 3 + 5", acreditando que eles são capazes de entender isso.

Convém lembrar ainda que, nessa fase do aprendizado, os alunos têm dificuldades ligadas à inclusão de classes. Muitos não conseguem resolver um problema do tipo "Dona Lúcia comprou 6 bananas e 4 laranjas. Quantas frutas comprou?" porque não dispõem de uma classe que inclua bananas e laranjas, embora o próprio problema tenha especificado a classe *frutas*. Talvez conseguissem dar a resposta de imediato se a questão fosse formulada assim: "Dona Lúcia comprou 6 bananas em uma banca e 4 bananas na outra. Quantas bananas comprou?".

É importante também que, para resolver seus cálculos, a criança tenha à disposição os mais variados materiais auxiliares (fichas, palitos, grãos de cereais, contadores, etc.) para manipular à vontade, representando as quantidades citadas nos problemas e realizando com eles as ações que julgar necessárias.

Encontrada a resposta, é de extrema importância solicitar aos alunos que apresentem aos colegas a sua solução, falando sobre o raciocínio empregado, fazendo montagens com o material de que dispõem, desenhando figuras na lousa ou usando qualquer outro procedimento de sua preferência.

Na fase em que os alunos já estiverem realizando com facilidade a adição de duas parcelas, o professor poderá apresentar situações em que eles passam a somar mais de duas parcelas utilizando o cálculo mental.

A discussão das várias estratégias usadas pelos alunos para chegar ao resultado — que serão todas valorizadas pelo professor — revela-se uma atividade de grandes possibilidades para a aprendizagem, dando aos alunos a oportunidade de desenvolverem autonomia de pensamento.

Para calcular 7 + 6 + 3 + 5 + 4, por exemplo, o aluno emprega intuitivamente as propriedades da adição: a associativa para reunir algumas parcelas e a comutativa para reordená-las do modo mais conveniente. Podem surgir soluções como:

7 + 6 + 3 + 5 + 4 = → 13 + 3 + 5 + 4 = → 16 + 5 + 4 = → 21 + 4 = → 25

ou

7 + 3 + 6 + 4 + 5 = → 10 + 10 + 5 = → 25

assim como

6 + 3 + 5 + 4 + 7 = → 9 + 9 + 7 = → 18 + 7 = → 25

Todas as soluções devem ser apresentadas à classe e discutidas.

Escrita e representação

A próxima etapa será apresentar situações que ajudem os alunos a dar significado à representação formal a + b = c, em que *a*, *b* e *c* representam números naturais.

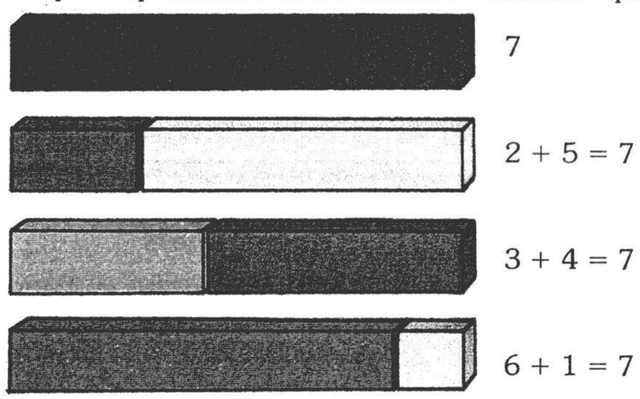
A escrita aditiva só deve ser iniciada após um trabalho com utilização de material concreto, cálculo mental e representação informal, e sempre dentro do contexto de *comunicação de resultados*.

Vejamos a seguir um exemplo de situação que pode ser trabalhada.

"Joguei dois dados. Num deles, saiu o 5 e, no outro, o 4. Como poderemos comunicar aos colegas o total de pontos de cada dado e o total geral obtido?"

O professor deve incentivar a criança a buscar seu modo pessoal de fazer essa indicação, discutindo com os colegas a solução proposta. Só depois dessa conclusão se poderá introduzir a escrita 5 + 4 = 9, explicando que ela é reconhecida *universalmente*, isto é, uma criança de outro país pode não compreender o nosso idioma, mas entenderá essa representação.

Para as atividades de escrita aditiva pode-se utilizar também o material Cuisenaire. Por exemplo, a partir de um "murinho" com 7 tijolos, os alunos constroem outros "murinhos", do mesmo tamanho daquele, cada um formado de 2 novos "murinhos". Depois representam com a escrita o "murinho" que fizeram.

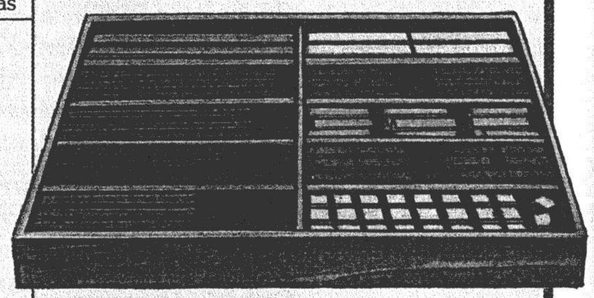


Nesse tipo de atividade, é comum algumas crianças dirigirem-se ao professor e, muito admiradas, mostrarem que "O murinho do 2 + 5 dá certo, mas o do 5 + 2 também dá!". Isso significa que estão começando a dar-se conta da comutatividade da adição.

O MATERIAL CUISENAIRE

O conjunto pedagógico conhecido como *material Cuisenaire* foi criado pelo professor belga Georges Hottelet Cuisenaire, que o apresentou em seu livro *Os números em cor: novo processo de cálculo pelo método ativo, aplicável a todas as séries da escola primária*, em 1952. O material Cuisenaire compõe-se de barrinhas de madeira, em forma de prisma, com altura que varia de 1 cm a 10 cm, nas seguintes cores e quantidades:

Cor	Número que representa	Quantidade de barras
Branca	1	100
Vermelha	2	50
Verde-clara	3	36
Roxa	4	28
Amarela	5	20
Verde-escura	6	16
Preta	7	14
Marrom	8	12
Azul	9	12
Laranja	10	10



As cores foram escolhidas de modo a formar "famílias":
- família vermelha (vermelho, roxo, marrom) → 2, 4, 8;
- família amarela (amarelo, laranja) → 5 e 10;
- família azul (verde-claro, verde-escuro, azul) → 3, 6, 9;
- a cor branca (contida em todas as demais) representa o 1, divisor de todos os números;
- a cor preta (não contida em nenhuma outra) representa o 7, número primo, e não forma "família" com nenhuma das demais cores da coleção.

Com as barras Cuisenaire, é possível desenvolver em classe diversas situações para o aprendizado de operações e conceitos matemáticos, mas é preciso ressalvar que o trabalho com esse material freqüentemente gera dificuldades. Isso porque as crianças devem memorizar as cores correspondentes aos valores das barras, o que *não é* uma boa estratégia — pois, além de decorar o nome e o signo gráfico relativo a cada quantidade (conhecimento social de âmbito universal), elas têm de decorar também as cores relacionadas a essas quantidades (conhecimento social específico para esse jogo).

Além disso, há uma confusão entre a quantificação ligada às grandezas de natureza discreta e às de natureza contínua. Por exemplo, a criança que observa *uma* barra roxa está vendo *uma* barra; no entanto, ela deve associar essa barra ao número 4, por seu tamanho (natureza contínua) e cor (aspecto qualitativo). Algumas empresas brasileiras têm contornado esse problema, fazendo marcas nas barras para indicar a quantidade de unidades que elas representam.

Os sinais convencionais

Professores das séries iniciais do Ensino Fundamental conhecem as dificuldades de se conseguir que as crianças utilizem os sinais convencionais das operações (+, −, =, etc.). Quando solicitadas a representar por escrito o raciocínio realizado diante de uma situação-problema, os alunos tendem a colocar apenas o resultado final encontrado.

Em uma situação de jogo com 2 dados, por exemplo, em que se insiste com as crianças para que registrem os valores obtidos em cada dado e o total de pontos, mesmo aquelas que já estão "aprendendo" na escola a representação convencional, não a usam espontaneamente. Temos visto representações como:

2 5,
7 2 com 5,
2 7 5, e outras.

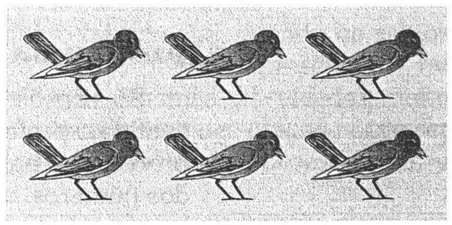
Essa dificuldade não é de estranhar, se considerarmos que, entre os diversos sistemas numéricos desenvolvidos pela humanidade, pouquíssimos tinham a preocupação em representar as operações que levavam a um determinado resultado. A grande maioria registrava apenas o resultado obtido, usando, se necessário, palavras para descrever o raciocínio realizado. Apenas os sistemas egípcio e babilônio apresentavam sinais para as operações aritméticas básicas; os sinais que hoje utilizamos para indicar adição e subtração surgiram só no século XVI (veja boxe à p. 100).

Acreditamos, por isso, que a introdução dos sinais convencionais que representam as operações deve ser feita de modo bem cuidadoso e gradual. É importante oferecer às crianças muitas situações em que elas possam criar seu próprio jeito de representar o raciocínio realizado em uma situação de cálculo e que a classe possa conhecer e discutir as diferentes representações criadas, escolhendo as que lhe parecem mais eficientes.

A representação formal deve ser introduzida, se possível, juntos com algumas informações sobre a história de sua elaboração ao longo dos tempos. O professor deve empregá-la sempre e sinalizar sua presença e significado em livros e outros textos apresentados aos alunos. Mas, a cobrança de sua utilização pelas crianças, nessa etapa da aprendizagem, deve ser mínima.

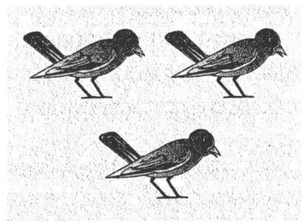
Construindo problemas com adição

Depois de trabalhados os fatos fundamentais da adição e a escrita aditiva, podem ser propostas algumas atividades de construção de problemas a partir de ilustrações apresentadas pelo professor e representadas por meio de escrita matemática, conforme o exemplo:



Primeiro a professora mostra o cartaz ao lado:

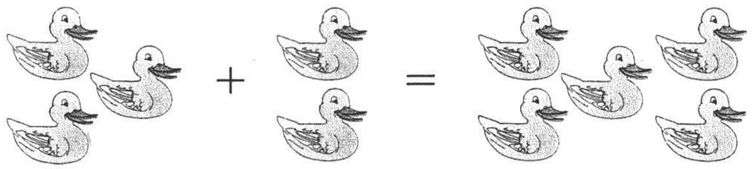
Em seguida, este:



Finalmente, apresenta a escrita: 6 + 3 = 9.

Para essa escrita, um grupo de alunos, no início da 2ª série do curso fundamental, criou o seguinte "problema": "Rafael foi no pátio da escola. Lá ele encontrou seis passarinhos e em casa ele pegou mais três passarinhos e ficou com nove". Observe-se que, nessa fase, as crianças consideram os problemas como histórias completas e não vêem necessidade de criar uma pergunta sobre a situação descrita.

Quando trabalha com figuras, o professor deve evitar combiná-las com símbolos matemáticos, pois isso pode prejudicar a compreensão dos alunos. Um professor, por exemplo, pretendendo ilustrar a escrita aditiva, usou um flanelógrafo com figuras de patinhos dispostas da seguinte maneira:



Quando pediu aos alunos que contassem o que viam, a resposta foi unânime: "São 10 patinhos, professor". Embora ele insistisse, mostrando que, conforme a figura, "3 patinhos mais 2 patinhos são 5 patinhos", os alunos continuaram sem entender.

O professor, por sua vez, muito frustrado com o mau resultado de seu trabalho, também não compreendeu o motivo da dúvida dos alunos!

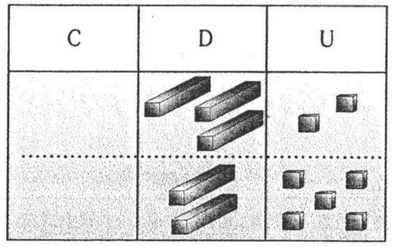
Esse exemplo ilustra bem o fato de que, muitas vezes, os adultos não têm êxito em explicar algo às crianças porque utilizam sua própria lógica. A criança não aprende só observando o professor realizar uma operação ou vendo uma figura: para ela, a operação *é a interiorização de sua própria ação.*

O algoritmo da adição

Só convém iniciar o trabalho com o algoritmo da adição quando o professor tiver certeza de que os alunos já dominam o processo de agrupamentos e trocas e a representação simbólica dos números, no sistema de numeração decimal.

Inicialmente, as adições deverão ser feitas no ábaco e depois registradas no caderno. Vejamos dois exemplos.

1. Dois amigos estão numa competição. Um fez 32 pontos; o outro, 25. Se eles formarem uma dupla, qual será o total de pontos?



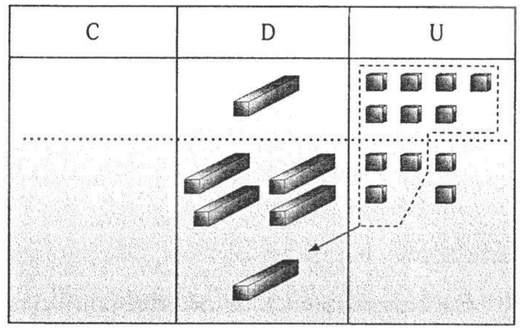
Representação no ábaco

D	U	
3	2	
2	5	+
5	7	

Representação simbólica

Com essa seqüência de trabalho, nada impede que as adições "com reserva" (o conhecido "vai 1") sejam feitas simultaneamente com as "sem reserva". Isso pode ser constatado em todas as escolas que realizam o trabalho prévio com agrupamentos e trocas. Crianças familiarizadas com esse processo realizam os cálculos com a mesma facilidade, nas duas situações.

2. Os adversários da dupla anterior fizeram os seguintes pontos: o primeiro, 17; o segundo, 45. Qual das duplas ganhou o torneio?



Representação no ábaco

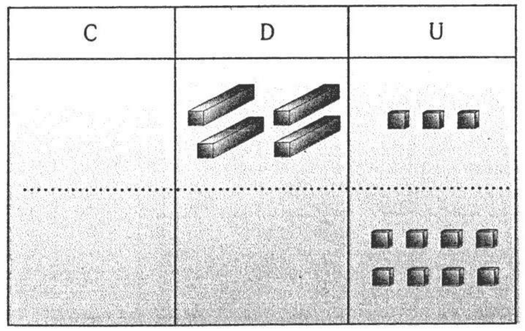
1		
D	U	
4	5	
1	7	+
6	2	

Representação simbólica

É importante que o professor observe alguns aspectos quanto ao trabalho com o algoritmo da adição. Se os algoritmos são construídos para facilitar os cálculos, não tem sentido "armar contas" do tipo 3 + 4, pois nessas operações o algoritmo em nada contribui para que se encontre o resultado.

Também merece destaque o fato de que, quando os alunos realizam os cálculos no ábaco para depois representá-los no caderno, desaparecem totalmente algumas dificuldades muito comuns. Uma delas é a compreensão de que "unidade deve ser colocada embaixo de unidade, dezena embaixo de dezena, e assim por diante".

Se o aluno visualizar no ábaco a situação:



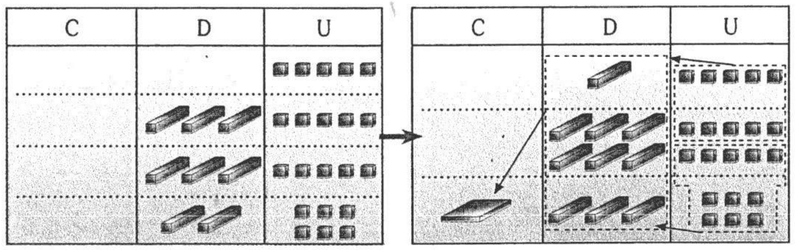
ele jamais irá representá-la como:

D	U	
4	3	
8		+

Desse modo, economiza-se o tempo gasto com exercícios do tipo "arme e efetue", que servem apenas para treinar os alunos a posicionar corretamente os algarismos, mas sem que saibam muito bem por quê.

Outra observação importante é que os alunos, depois de terem dominado a soma de duas parcelas, têm facilidade para resolver questões como:

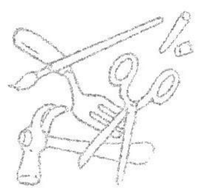
"Nossa escola vai fazer uma excursão com as duas classes de 3ª série e a de 4ª série. Como o ônibus escolar transporta 51 pessoas, precisamos calcular o total de pessoas para saber se só um ônibus será suficiente. Cada classe de 3ª série tem 35 alunos e a 4ª série tem 26. Além disso, 5 adultos deverão acompanhar os alunos."



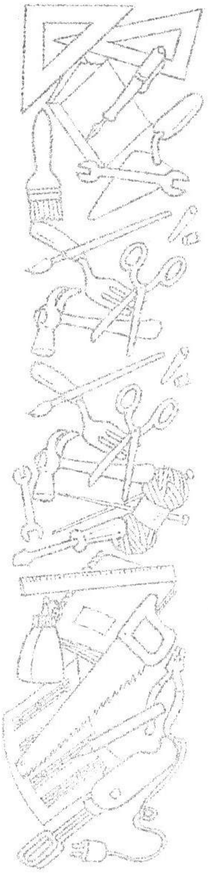
1 C	2 D	U	
	0	5	
	3	5	
	3	5	+
	2	6	
1	0	1	

É essencial que os alunos discutam o resultado encontrado e dêem uma resposta como: "Há 101 pessoas para transportar. Se um ônibus tem 51 lugares, então teremos de alugar dois ônibus".

Para você fazer

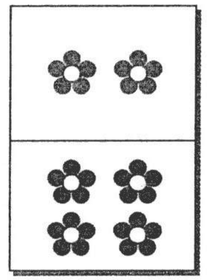


1. Ofereça a um grupo de crianças, entre 6 e 8 anos, algumas situações em que elas devam calcular a soma de quantidades como 8 e 6, 7 e 5, etc. Observe as estratégias que elas utilizam para esses cálculos. (Somam pontos de 1 em 1? Decompõem os totais, reorganizando-os?)



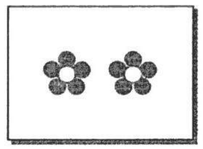
2. Crie alguns jogos em que seja necessário somar pontos para obter o total da jogada. Ofereça-os a um grupo de crianças, pedindo a elas que registrem os pontos obtidos. Comente as estratégias utilizadas por ela.

3. Em uma sala de 1ª série, a professora utilizou "quadros em movimento" para que as crianças criassem problemas. A atividade era a seguinte: em folhas de sulfite dobradas ao meio, ela colocava algumas figuras na metade superior e outras do mesmo tipo na metade inferior. As crianças coloriam as figuras.

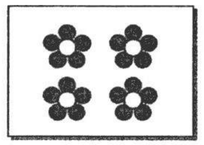


A seguir, a professora pedia que dobrassem a folha e olhassem somente uma das metades; depois, a outra metade e, finalmente, a folha toda. Por fim, pedia aos alunos que inventassem um problema a respeito.

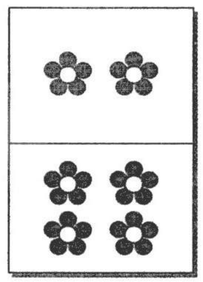
Primeiro aconteceu isto:



Depois isto:



Agora, temos isto:



Aplique essa atividade com algumas crianças e depois comente o resultado.

II. Subtração

Se a adição é uma operação bastante simples de se trabalhar, o mesmo não acontece com a subtração — e isso por diversos motivos.

Em primeiro lugar porque, como comprovam as pesquisas de Piaget, o raciocínio das crianças se concentra em aspectos positivos da ação, percepção e cognição. Os aspectos negativos, como inverso e recíproco, só são construídos mais tarde.

Em segundo lugar, porque a subtração, embora presente desde muito cedo no dia-a-dia das crianças, tem um aspecto afetivo adverso, muitas vezes ligado a situações de perda ("Maria tinha 5 fivelinhas. Perdeu 2. Quantas tem agora?"; ou "Pedrinho tinha 12 figurinhas e deu 7 a seu irmão. Com quantas ficou?").

Por último, porque a subtração envolve idéias bastante diferentes entre si, como tirar, comparar, completar.

Com freqüência, também, o vocabulário utilizado para representar as situações de subtração não é claro, induzindo a

criança a erros. Numa classe de 2ª série, por exemplo, a professora apresentou o seguinte problema: "Um pai tem 34 anos e sua filha tem 8 anos. Qual é a diferença?". Uma aluna respondeu que "A diferença é que a filha é criança e o pai já é velho". Resposta muito natural para quem, na linguagem comum, está acostumado a usar o termo "diferença" no sentido qualitativo.

Outra situação muito freqüente é aquela em que as crianças, confundindo palavras do enunciado com termos que elas associam a operações de somar, acabam empregando a adição para resolver questões assim: "Ana tem 18 figurinhas e Paula tem 32. Quantas figurinhas Paula tem *a mais* que Ana?"

A idéia de tirar

Quanto às idéias ligadas à subtração, é consenso até mesmo entre adultos escolarizados que se trata "da conta que serve para *tirar*". Apresenta-se um todo e dele se *tira* uma parte. Por exemplo: "Em um ônibus havia 38 pessoas. No primeiro ponto desceram 17. Quantas permaneceram no ônibus?".

Parece que, de todos os anos que freqüentamos a escola, apenas esse raciocínio permaneceu gravado em nossa mente. No entanto, a subtração também envolve situações em que precisamos, por exemplo, *comparar* e *completar* quantidades.

A idéia de comparar

A idéia de comparar está presente nas situações em que confrontamos duas quantidades independentes, como: "Alice tem uma coleção com 72 selos e sua irmã tem 94. Quem tem mais selos? Qual é a diferença?".

Ocorre, também, em casos que envolvem a comparação de *uma parte* com o *todo* e depois com a *outra parte*, e que, por isso mesmo, representam maior dificuldade. Por exemplo: "No estojo de Luci há 18 lápis. Desse total, 6 são pretos e os outros são de cor. Quantos lápis de cor ela tem?".

A idéia de completar

A idéia de completar aparece em situações nas quais o cálculo começa por uma parte e vai sendo completado até chegar ao todo. Por exemplo: "Quero comprar uma mochila que custa 56 reais, mas só tenho 42 reais. Quanto falta?".

Para fazer esse cálculo, muitas vezes utilizamos o mesmo procedimento que costumamos empregar em situações que envolvem o cálculo de troco, nas quais raramente recorremos à "conta de menos". Ou seja:

$$42 + \mathbf{3} = 45$$
$$45 + \mathbf{5} = 50$$
$$50 + \mathbf{6} = 56$$
$$\mathbf{14}$$

Faltam, portanto, 14 reais.

Muitos livros didáticos, ao ilustrar as operações de subtração, enfatizam somente a idéia de "tirar". No entanto, no elenco de problemas propostos no final de cada capítulo aparecem as três situações — tirar, comparar e completar — , e as crianças geralmente têm dificuldades em resolvê-las.

Como trabalhar a subtração

Para Piaget, embora toda situação de subtração possa ser interpretada como uma relação parte/todo, há diferenças no modo de se trabalhar essa relação.

a) Nas situações de "tirar", a criança pensa primeiro no todo e depois remove uma parte dele; são ações sucessivas.

b) Nas situações de "comparar", há dois todos cujos elementos devem ser colocados em correspondência um a um. Há ainda o caso em que se compara o todo com uma de suas partes, e então a criança deve ser capaz de pensar que a parte menor é um todo e, ao mesmo tempo, uma parte do todo inicial; é necessário que ela trabalhe com inclusão de classes, pensando simultaneamente no todo e em cada uma de suas partes. Isso só é possível por volta dos 7 ou 8 anos de idade, quando ela já dominou a comparação de dois todos.

Seria preferível que essas situações começassem a ser exploradas por volta da 2ª série. Isso não quer dizer, no entanto, que o professor não possa trabalhar algumas questões sobre subtração já na 1ª série. Alunos que foram incentivados a realizar atividades de reunir e separar porções de uma coleção de objetos (por exemplo, $8 = 3 + 5$, $8 = 4 + 4$, $8 = 6 + 2$, etc.) sabem, com a mesma facilidade, que $5 + 3 = 8$ e que $8 - 5 = 3$; ou que $8 - 3 = 5$.

Como vimos na adição, é importante que sejam apresentadas à criança situações em que ela possa agir sobre os objetos para realizar os cálculos. No caso da subtração, essa recomendação torna-se ainda mais necessária, pois somente quando age sobre objetos a criança pode verificar que não tem sentido, por exemplo, "tirar 9 balas de um pacote em que só há 6"; e que a representação escrita $6 - 9$ é impossível no conjunto dos números naturais.

Há crianças bem maiores, de 8 e até de 9 anos, que não hesitam em representar com $18 - 34$ uma situação deste tipo: "Em um estacionamento estão 18 carros. Sabendo que nele cabem 34, determine quantas vagas ainda há".

Outras crianças podem resolver subtrações como $34 - 18$ da seguinte maneira:

$$\begin{array}{r} 34 \\ -\,18 \\ \hline 24 \end{array}$$

ou seja, tranqüilamente subtraem 4 de 8.

Segundo Gaston Mialaret (1975: 87):

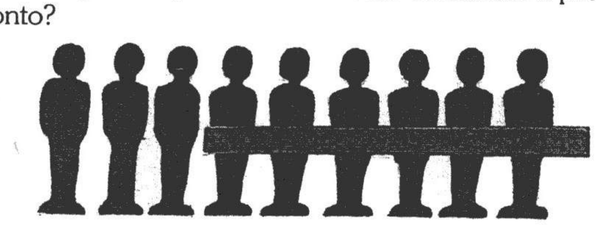
> Torna-se complexo compreender e analisar, em pormenor, essas dificuldades da criança. Só podem resolver-se paralelamente a outras que se situam no plano psicológico puro: comutatividade ligada à noção de reversibilidade, noção de ordem ligada a aspectos complexos da estrutura espacial e temporal. Não são dificuldades tipicamente matemáticas, mas estão na origem de certos processos sem os quais não se pode desenvolver completamente uma formação matemática.

Desse modo, quanto mais o aluno trabalhar concretamente com situações de subtração antes de se preocupar com sua representação formal, maior possibilidade ele terá de superar essas dificuldades.

Materiais para o aprendizado

O uso de material de manipulação ajuda o aluno a lidar com as idéias associadas à subtração. Se oferecermos palitos, grãos de milho ou pedrinhas às crianças, para que representem os problemas, elas irão utilizar esse material de diferentes modos, de acordo com cada situação, mesmo quando se referem a números iguais.

1. Num ônibus havia 9 pessoas. Na primeira parada, desceram 6. Quantas permaneceram no ônibus até o próximo ponto?



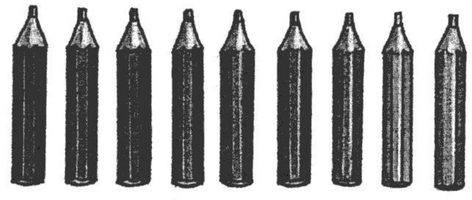
A criança apresenta o todo e dele retira uma parte.

2. Alice tem 9 selos em sua coleção e sua irmã tem 6. Quem tem mais? Qual é a diferença?



A criança vai representar as duas coleções e compará-las, por pareamento.

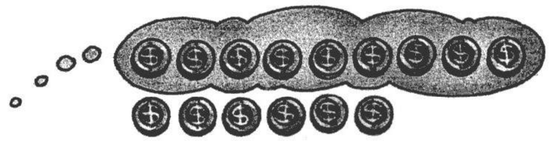
3. No estojo de Luci há 9 lápis. Destes, 6 são pretos e o restante é de lápis de cor. Quantos são os lápis de cor?



A criança irá mostrar a coleção toda, sabendo que uma parte dela é formada de lápis pretos enquanto a outra parte é formada de lápis de cor: ela não está tirando uma das partes do todo, mas pensando nela em relação à outra parte e ao todo.

4. Quero comprar um estojo que custa 9 reais, mas só tenho 6. Quanto falta?

Aqui as crianças representam a questão de modos variados: algumas utilizam a comparação, representando o preço do estojo e a quantidade de dinheiro que já têm. Outras partem da idéia de completar a quantia que já têm até chegar ao preço do estojo.





Note que os problemas sugeridos são exatamente os mesmos apresentados de início, apenas com números menores. Essa estratégia serve para mostrar que a criança resolve os problemas com números pequenos agindo sobre tais quantidades sem pensar "qual é a conta que devo fazer". Exigir a *sentença matemática* muito precocemente serve apenas para deixá-la insegura quanto a seu próprio modo de resolver a questão, que não está sendo aceito pela professora, e perplexa diante de uma operação que lhe é imposta e que não lhe significa nada.

Para resolver problemas em que a ordem de grandeza dos números inviabiliza a representação com material concreto ou com desenhos, o aluno terá de se apoiar num algoritmo. A essa altura, portanto, ele já deverá estar familiarizado com os algoritmos das operações o suficiente para acreditar neles como um instrumento adequado.

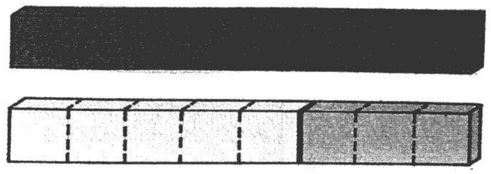
É por esse motivo que, mesmo sem exigir a sentença matemática (escrita *antes* da resolução do problema), convém que o professor estimule alunos a discutir as soluções encontradas pela classe. Isso leva à consciência de que há uma operação matemática que pode ser usada como auxiliar na resolução daquele problema.

Como já ficou demonstrado nas pesquisas de Gaston Mialaret, há um longo caminho entre as duas estratégias — a *ação* sobre objetos que representam os dados do problema e o uso de uma *operação* para resolvê-lo. Se esse caminho não for bem trilhado, poderá levar aos conhecidos "traumas" em relação à matemática.

Atividades com o material Cuisenaire

A seguir, alguns exemplos de atividades com as barras Cuisenaire:

1. Relacionar a adição e a subtração utilizando a idéia de "tirar".



a) Que tamanho de barra eu terei se juntar essas duas?

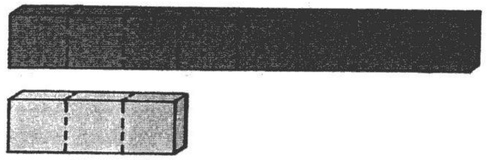
b) Vamos representar isso com uma sentença matemática?

$$3 + 5 = 8$$

c) E se tirarmos, da barra marrom, um pedaço do tamanho da amarela? Vamos representar com uma sentença matemática?

$$8 - 5 = 3$$

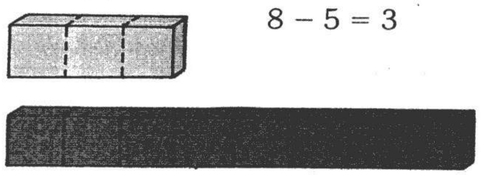
2. Trabalhar a idéia de comparar.



a) Qual barra é maior? Quanto ela é maior?

b) Vamos representar essa diferença entre as duas com uma sentença matemática?

$$8 - 5 = 3$$



3. Trabalhar a idéia de completar. Por exemplo:

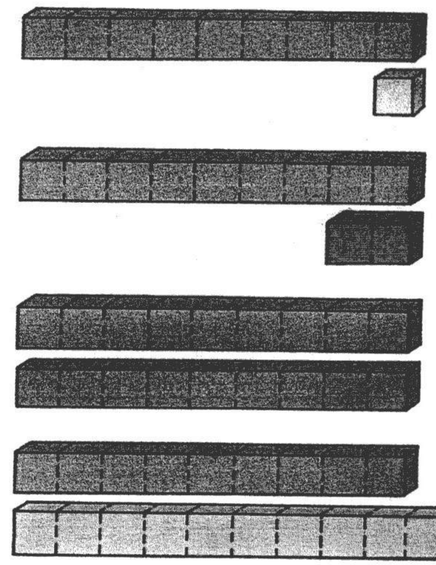
a) Que barra devemos juntar a essa, para ficar com uma do tamanho da marrom?

b) Vamos representar isso com uma sentença matemática?

$$3 + 5 = 8$$

4. Construir os resultados fundamentais.

Pegar uma barra azul (a do 9) e tirar dela cada uma das outras barras; fazer uma escrita representando isso.



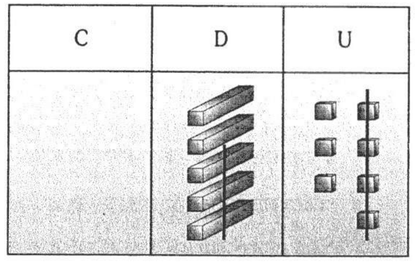
É importante que as próprias crianças deparem com esse problema, para perceber que nem sempre é possível subtrair dois números naturais.

O algoritmo da subtração

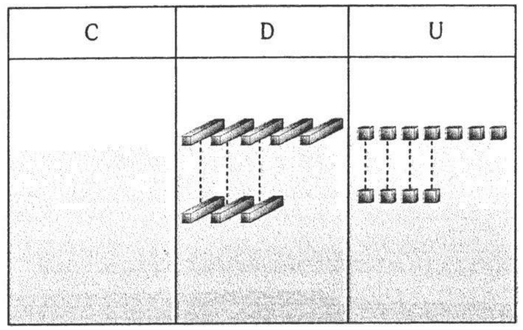
O algoritmo da subtração só deve ser trabalhado a partir dos 8 anos e, mesmo assim, acompanhando as ações realizadas no ábaco.

Nesse caso, até no ábaco surgem diferentes modos de agir, pois cada um raciocina de acordo com a idéia de subtração que lhe é mais familiar. Para representar e calcular 57 – 34, por exemplo, encontramos entre alunos de uma mesma turma diferentes soluções.

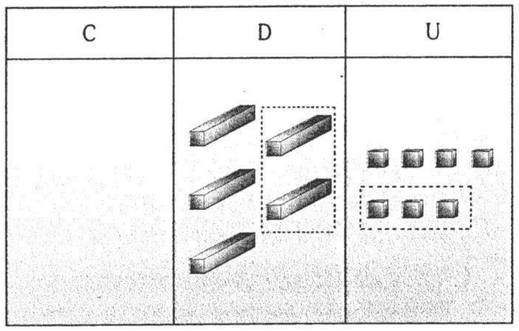
Aqueles que preferem a idéia de tirar representam apenas o 57 e dele retiram as peças que correspondem a 34 ("de 7 tiramos 4 e de 50 tiramos 30").



Os que trabalham melhor com a idéia de comparar representam os dois números e fazem a correspondência um a um, para chegar ao resultado ("comparamos 7 com 4 e 50 com 30").



Poucos são os alunos que trabalham a idéia de ir completando o 34 até chegar ao 57 ("quanto falta para 4 chegar a 7 e quanto falta para 30 chegar a 50?").

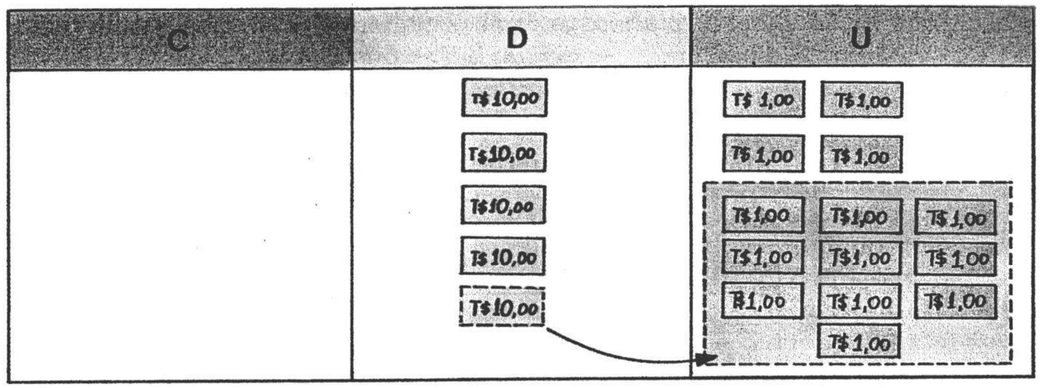


Quando existe no minuendo algum algarismo com valor menor que seu correspondente no subtraendo, surgem as grandes discussões quanto ao processo a ser utilizado: *recurso à ordem superior* (regra de "emprestar") ou *compensação* (regra de somar um mesmo valor ao minuendo e ao subtraendo).

Muitos professores preferem o segundo processo, argumentando que provoca menos erros. No entanto, o primeiro em geral é de mais fácil compreensão pelo aluno, uma vez que utiliza apenas a ação de agrupar e trocar, já bastante trabalhada desde a introdução do sistema de numeração decimal. No segundo processo, a explicação é bem mais sofisticada, como se verá a seguir. Como exemplo, vamos analisar a operação 54 – 38 nos dois processos.

Processo de recurso à ordem superior

A concretização da idéia de subtrair por meio de uma situação com dinheiro é a que tem conduzido aos melhores resultados. Considerando uma moeda criada pelos alunos (o tut), pode-se colocar a seguinte situação: Você tem 5 notas de T$ 10 e 4 notas de T$ 1 e precisa pagar T$ 38 a uma pessoa que não tem troco nenhum. Como fazer?



Os alunos logo percebem que devem trocar "uma nota de T$ 10 por 10 notas de T$ 1, ficando com 14 notas de T$ 1. Assim, entregam 8 notas de T$ 1 e ainda ficam com 6 notas de T$ 1. Como 1 nota de T$ 10 já foi trocada, o aluno tem ainda 4 notas; entrega 3 e fica com 1. O resultado é, então, T$ 16.

Fazendo a representação no algoritmo, temos:

D	U
4	10 14
~~5~~ 1 =	4 –
3	8
1	6

O mesmo pode ser realizado com o material dourado.

EMPRESTAR: CONTROVÉRSIAS

O termo "emprestar" é considerado bastante inadequado, pois pede-se emprestado mas *não se paga* o empréstimo feito. Além disso, o aluno que não compreende bem o processo de agrupamentos e trocas e só faz contas com lápis e papel, sem agir sobre materiais de contagem, não entende por que pede 1 emprestado e recebe 10.

Quando se usa o termo "trocar", no entanto, fica claro que sempre se troca uma nota de dinheiro por outras que, somadas, representam o mesmo valor da primeira. Assim, no problema que acabamos de ver, trocou-se uma nota de T$ 10 por dez notas de T$ 1, ou seja, trocou-se 1 dezena por 10 unidades.

D	U
~~5~~ 4	14
3	8 –
1	6

Processo de compensação

Esse processo consiste em adicionar um mesmo valor ao minuendo e ao subtraendo. Primeiro, trabalha-se a propriedade da *invariância das diferenças*. Exemplo:

Uma menina tem 9 anos e seu irmão tem 6 anos. A diferença entre as idades é: 9 – 6 = 3

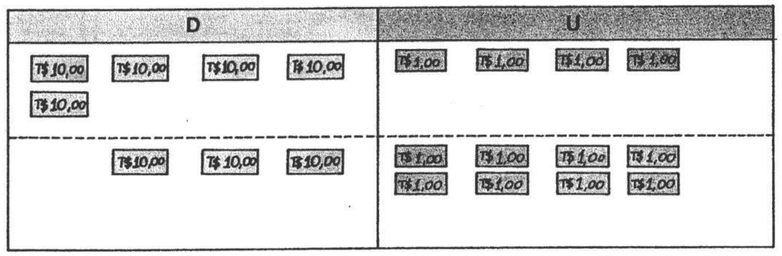
Dentro de 5 anos, os dois terão 14 e 11 anos. A diferença entre as idades será:

$$\begin{array}{ccc} 9 & - & 6 = 3 \\ +5 & & +5 \\ 14 & - & 11 = 3 \end{array}$$

Há 2 anos, os irmãos tinham 7 e 4 anos. A diferença ainda era:

$$\begin{array}{c} 9 - 6 = 3 \\ {\scriptstyle -2}\ \big(\quad\big)\ {\scriptstyle -2} \\ 7 - 4 = 3 \end{array}$$

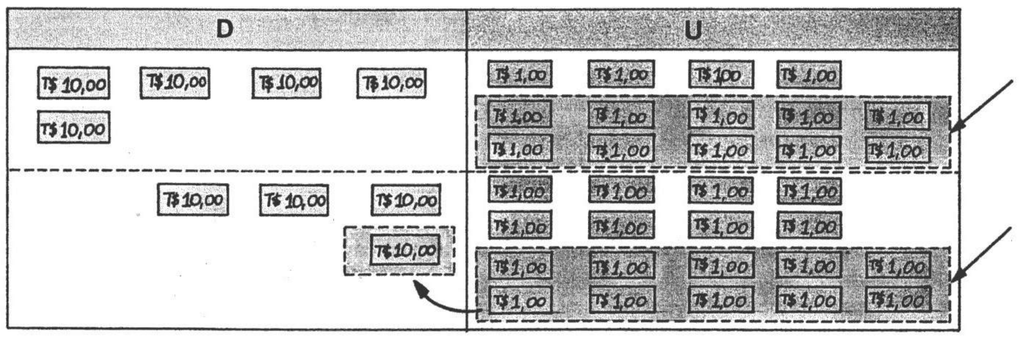
No caso da subtração 54 − 38, podemos visualizar melhor o processo de compensação no ábaco, a partir da idéia de comparar:



Pela regra da compensação, como T$ 4 é menor que T$ 8, devemos aumentar a primeira parcela, somando a ela dez notas de T$ 1. No entanto, essa propriedade exige que façamos o mesmo com a segunda parcela, e assim ficaremos com 14 − 18, o que não resolve o caso.

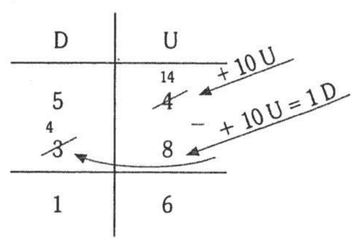
Então, como será possível aplicar a propriedade sem modificar a quantidade de notas de T$ 1 da segunda parcela?

Para contornar essa situação, trocamos as dez notas de T$ 1 acrescentadas à segunda parcela por uma nota de T$ 10. Essa nota será somada às três notas de T$ 10 que já estão lá.



Portanto, das cinco notas de T$ 10 e catorze notas de T$ 1, é possível tirar quatro notas de T$ 10 e oito notas de T$ 1 sem dificuldade.

Acrescentamos 10 unidades ao minuendo e ao subtraendo, o que mantém a mesma diferença. No entanto, transformamos as 10 unidades acrescentadas ao subtraendo em 1 dezena, aumentando assim a ordem das dezenas do subtraendo. A representação no algoritmo fica assim:



Essa segunda explicação, naturalmente, não é apropriada para crianças de 8 ou 9 anos.

Alguns professores argumentam que o processo de recurso à ordem superior não é prático nos casos em que o minuendo apresenta muitos zeros, provocando erros.

É importante destacar, no entanto, que muitas vezes têm aparecido soluções brilhantes entre alunos que, desde as séries iniciais, tiveram a liberdade de procurar seus próprios caminhos. Por exemplo, ao fazer a subtração 100 − 57, um aluno, achando que não era bom trabalhar com tantos zeros, decidiu tirar 1 de 100 e trabalhar com 99. A conta ficou:

$$\begin{array}{r} 99 \\ -\ 57 \\ \hline 42 \end{array}$$

Depois, colocou de volta o 1 que havia tirado: 42 + 1 = 43.

É claro que esse processo foi imediatamente adotado pela classe toda!

Em outra turma, o professor havia trabalhado a invariância da diferença, e muitos alunos perceberam que, se tirassem 1 de cada termo, manteriam a diferença e não precisariam trabalhar com tantos zeros. Então, em vez de 100 − 57 = 43, fizeram 99 − 56 = 43.

Esses exemplos mostram como é importante que o professor dê aos alunos autonomia de raciocínio, sem impor regras imutáveis e inquestionáveis, para que eles resolvam os problemas e enfrentem os novos desafios de maneira criativa.

A SUBTRAÇÃO NO SÉCULO IX

Por volta do ano 820, foi fundada em Bagdá a Casa da Sabedoria, onde se reunia um grande número de sábios, vindos do mundo todo. Entre eles encontrava-se o grande matemático e astrônomo Mohammed ibu Musa al-Khowarizmi, um dos responsáveis pela divulgação, na Europa, do sistema de numeração indo-arábico (de seu nome derivam os termos *algarismo* e *algoritmo*).

Eis o algoritmo que al-Khowarizmi utilizava para fazer subtrações:

- inicia-se o processo da esquerda para a direita;
- os algarismos utilizados em cada subtração parcial são riscados, colocando-se o resultado acima deles;
- são usados, no minuendo, os algarismos necessários para formar um número maior que o do subtraendo.

Veja os exemplos a seguir:

a) 7 582 − 1 936 = 5 646

5 4
6 6 5 6
7 5 8 2
1 9 3 6

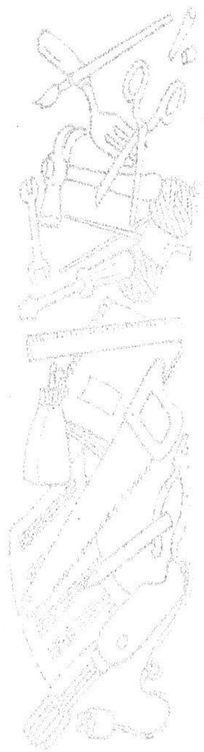
subtrações parciais:
7 − 1 = 6; 65 − 9 = 56;
8 − 3 = 5; 52 − 6 = 46

b) 28 347 − 9 186 = 19 161

1
1 9 2 6 1
2 8 3 4 7
9 1 8 6

subtrações parciais:
28 − 9 = 19; 3 − 1 = 2;
24 − 8 = 16; 7 − 6 = 1

Para você fazer



Observe os seguintes algoritmos da adição e da subtração:

$$\begin{array}{r} 235 + 54 = 289 \\ 200 + 30 + 5 \\ 50 + 4 \\ \hline 200 + 80 + 9 \end{array} \quad + \qquad \begin{array}{r} 387 - 264 = 123 \\ 300 + 80 + 7 \\ 200 + 60 + 4 \\ \hline 100 + 20 + 3 \end{array} \quad -$$

$$\begin{array}{r} 175 + 377 = 552 \\ 100 + 70 + 5 \\ 300 + 70 + 7 \\ \hline 400 + 100 + 40 + 10 + 2 \\ 500 + 50 + 2 \end{array} \quad + \qquad \begin{array}{r} 564 - 349 = 215 \\ 500 + \overset{50}{\cancel{60}} + \overset{10}{\cancel{4}}{}^{14} \\ 300 + 40 + 9 \\ \hline 200 + 10 + 5 \end{array} \quad -$$

Agora responda:

a) Que diferenças e semelhanças você vê entre esse processo e o apresentado no capítulo?

b) As atividades de agrupar e trocar, tal como apresentadas, estão adequadas a esse tipo de trabalho ou precisam ser modificadas para ficar de acordo com o processo?

III. Multiplicação

Ensinando multiplicação

Na maioria das escolas, a multiplicação é vista apenas sob o seu aspecto de "adição de parcelas iguais". É necessário, no entanto, que o professor tenha em mente que a multiplicação é também uma ferramenta para resolver *problemas de contagem* e oferece um dos primeiros contatos com a noção de *proporcionalidade*, uma das mais poderosas idéias matemáticas.

Nos estágios iniciais, realmente, o que se pretende é que o aluno veja a multiplicação como uma adição de parcelas iguais. Para isso, podem ser exploradas situações escolares em que é preciso formar grupos com o mesmo número de elementos.

Preocupado em cumprir o conteúdo programado, o professor muitas vezes acaba realizando sozinho a maior parte das tarefas do cotidiano da sala de aula e, desse modo, o aluno perde excelentes oportunidades de desenvolver maior familiaridade com a multiplicação. Por exemplo:

a) Precisamos de 3 equipes, cada uma com 4 alunos. Será que vamos usar todos os alunos da classe para formar as equipes?

b) Pegue uma quantidade suficiente de lápis de cor para distribuir 5 para cada colega de sua fileira.

c) Em nosso piquenique, vamos levar 2 sanduíches para cada criança. Quantos sanduíches precisaremos colocar na cesta?

Provavelmente, os alunos irão utilizar a adição para resolver essas situações. Se o professor pedir que representem o cálculo realizado, haverá diversas soluções. Vejamos algumas:

a) 

b) 

c) 

Então, a classe discute algumas das soluções, e o professor poderá introduzir a "nova" maneira de representar essas adições de parcelas iguais. Esse método é muito bem recebido pelos alunos, pois economiza trabalho:

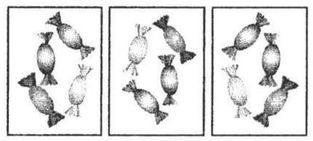
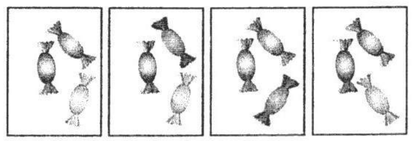
a) $4 + 4 + 4 = 3 \times 4$ (3 grupos de 4 alunos)

b) $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 6 \times 5$ (6 grupos de 5 lápis)

c) $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 \times 2$ (10 grupos de 2 sanduíches)

Muitos professores ficam em dúvida sobre o modo de representar a multiplicação: "Como apresentar $7 + 7 + 7 + 7$ aos alunos? Como 4×7 ou como 7×4? Ou ambos os modos?".

A experiência com alunos das séries iniciais tem demonstrado que é possível começar por qualquer um dos dois modos, mas nunca pelos dois simultaneamente. Como já foi discutido na adição e na subtração, a comutatividade não é algo simples para a criança. Além disso, nessa fase ainda não se consolidou a conservação das quantidades. Se uma criança tiver de escolher entre 3 caixinhas, cada uma com 4 balas, e 4 caixinhas, cada uma com 3 balas, terá muita dúvida antes de tomar uma decisão.

 ou 

Ao decidir qual forma de escrita irá usar, o professor deve ter muito claro o modo como pretende trabalhar as tabuadas — ou *fatos fundamentais* — da multiplicação. Muitas vezes, apresenta-se ao aluno uma das formas da escrita multiplicativa e, ao introduzir-se a tabuada, utiliza-se outra forma, o que torna ainda mais tortuoso o estudo "dessas terríveis tabelas". Se, por exemplo, introduzirmos a multiplicação tal como apresentada nos exemplos *a*, *b* e *c* anteriores, a tabuada *não poderá* ser trabalhada deste modo:

$2 \times 0 = 0$
$2 \times 1 = 2$
$2 \times 2 = 2 + 2 = 4$
$2 \times 3 = 2 + 2 + 2 = 6$
$2 \times 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$
$2 \times 5 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$
...

Esse modo de apresentar a multiplicação iria chocar-se com a escrita inicialmente introduzida. Nesse caso, para manter a coerência, seria mais apropriado iniciar a multiplicação assim:

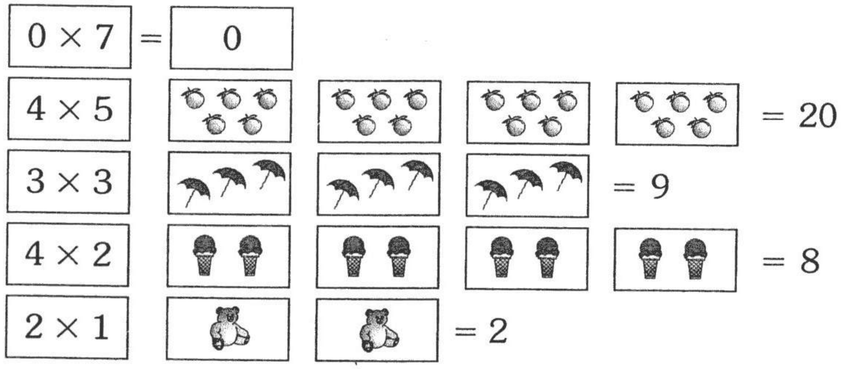
a) $4 + 4 + 4 = 4 \times 3$
b) $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 5 \times 6$
c) $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 2 \times 10$

Quanto a exigir que os alunos decorem a tabuada, provavelmente isso ainda será necessário por alguns anos (até que as calculadoras estejam tão difundidas quanto a caneta esferográfica). O que não se aceita, no entanto, é que as crianças decorem listas e mais listas de fatos fundamentais da multiplicação, sem saber para que servem ou como foram encontrados.

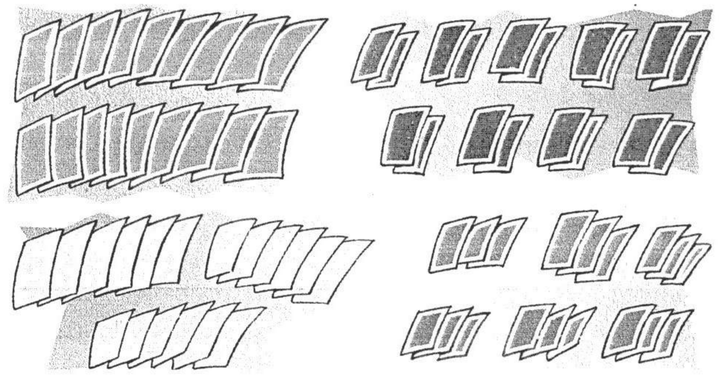
Portanto é conveniente que, em primeiro lugar, os alunos possam construir os resultados de algumas multiplicações, dentro de certos contextos, usando material de manipulação.

Sugestões de atividades iniciais

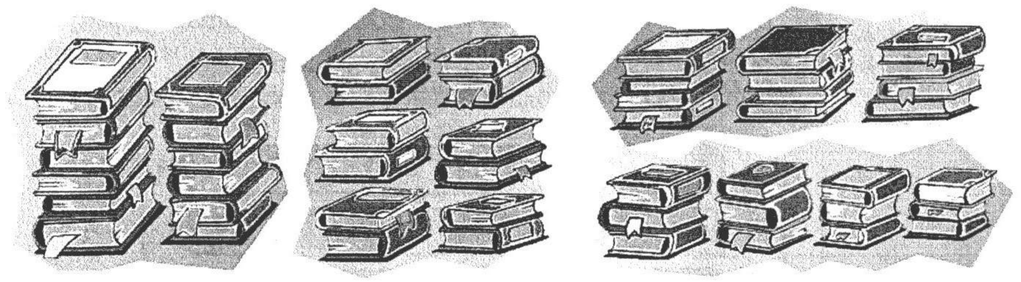
1. Represente, com figuras, as escritas multiplicativas e escreva os resultados.



2. A partir de 18 fichas, procure modos diferentes de formar grupos com quantidades iguais.



3. Como podemos empilhar 12 livros, formando pilhas com a mesma quantidade de livros?



4. É possível agrupar 15 alunos em equipes, sempre com o mesmo número de alunos por equipe?



Para alunos um pouco mais avançados em relação à multiplicação, podem-se apresentar problemas como este: "Paulo arrumou seu álbum colando 4 fotos em cada página e completou 9 páginas. Sua irmã resolveu colar 6 fotos em cada página e completou 6 páginas. Qual dos dois tem mais fotos? Represente as contas que você pode fazer para responder à pergunta".

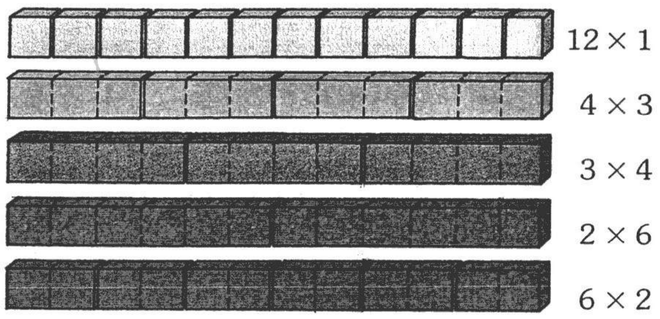
Pode-se também lançar mão do *preenchimento de tabelas*. O professor separa a classe em grupos e coloca à disposição das crianças muitas tampinhas de refrigerantes e caixinhas vazias. Trabalhando com esse material, cada grupo deverá completar a seguinte tabela:

Quantidade de caixas	Quantidade de tampinhas por caixa	Total de tampinhas
5	8	40
7	3	...
6	...	24
...	5	15

Usando as barras Cuisenaire

As barras Cuisenaire podem ser usadas como na adição ou como recurso para explorar a propriedade distributiva.

Por exemplo: Construa um muro com 12 barras de valor 1. Depois, construa outros muros do mesmo tamanho, formados apenas por barras da mesma cor. Use a escrita que você conhece para representar suas construções.



Uma criança que experimente colocar duas barrinhas de 5, por exemplo, perceberá que elas não servem, pois "dois muros de 5 são pouco para formar o muro de 12; já três muros de 5 o ultrapassam".

Para explorar a propriedade distributiva da multiplicação, relativamente à adição, com o uso das barras Cuisenaire, pode-se propor às crianças, por exemplo, que formem um muro com 6 barras verde-claras, calculem seu valor e façam uma representação matemática para essa ação.



$6 \times 3 = 18$

A seguir, os alunos separam o muro em dois outros, do modo que preferirem, e representam com outra escrita essa nova ação.



$(2 \times 3) + (4 \times 3) = 6 + 12 = 18$



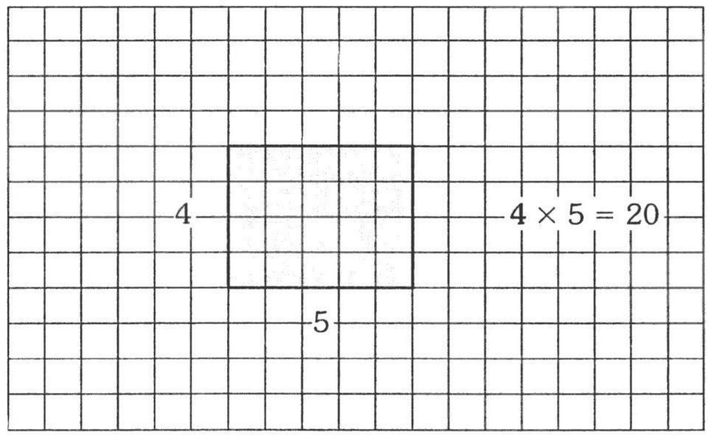
$(3 \times 3) + (3 \times 3) = 9 + 9 = 18$



$(5 \times 3) + (1 \times 3) =$
$15 + 3 = 18$

Papel quadriculado

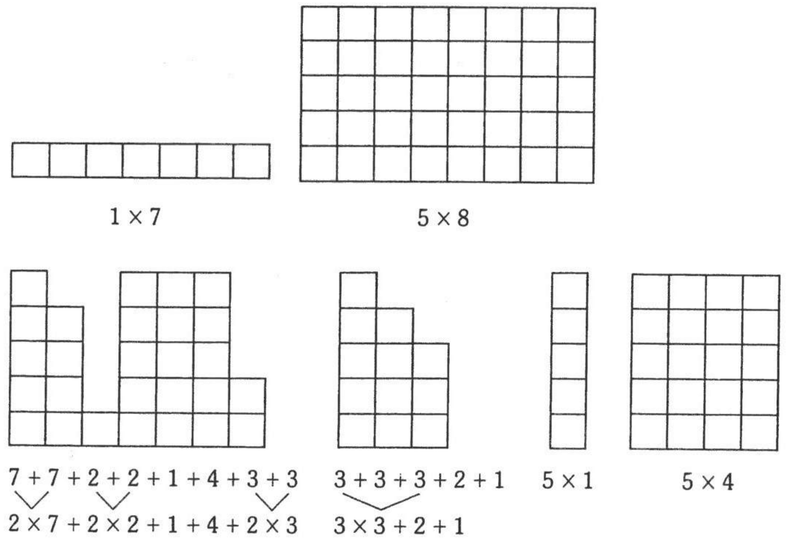
Esse material é bastante apropriado para o trabalho com multiplicação. Com o papel quadriculado (1 cm × 1 cm), podem-se formar, por exemplo, "pisos" do tipo:



e pedir aos alunos que calculem quantos "ladrilhos" há nesse "piso".

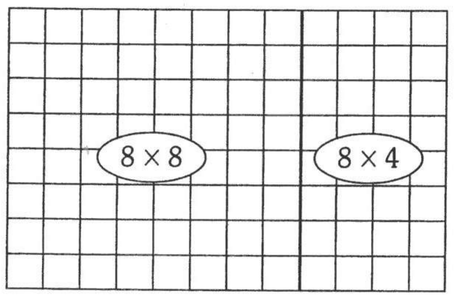
A princípio, a maioria das crianças conta os quadrados de um em um. Mas assim que percebem que todas as fileiras têm a mesma quantidade de "ladrilhos" passam a usar a adição com parcelas iguais e, a seguir, a multiplicação.

Depois de algumas dessas situações, o professor pode apresentar pisos de formatos variados e pedir aos alunos que calculem o total de "ladrilhos", representando com uma ou mais escritas aquilo que fizeram.



Quando são apresentados "pisos" maiores, os alunos chegam ao total de "ladrilhos" por cálculos parciais, utilizando intuitivamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

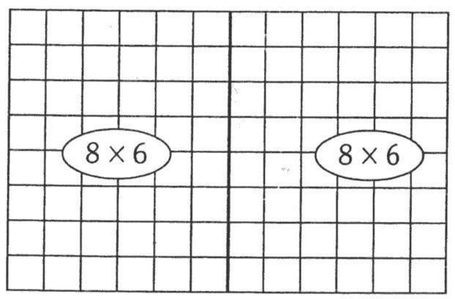
Assim, para 8×12, temos:



$8 \times 8 = 64$

$8 \times 4 = 32$

$64 + 32 = 96$



$8 \times 6 = 48$

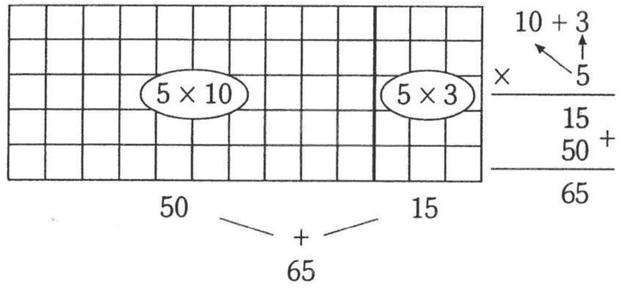
$48 + 48 = 96$

Com esse tipo de atividade, os alunos têm oportunidade de se apropriar das diversas maneiras de chegar aos resultados, estabelecer relações e descobrir propriedades de maneira intuitiva. Muitas vezes, os alunos recorrem a resultados que já dominam para economizar trabalho nos cálculos. Por exemplo:



Partindo do próprio conceito de multiplicação, esses alunos estão aplicando (novamente de modo intuitivo) a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, que é fundamental para o algoritmo que costumamos usar para calcular o produto de dois números quaisquer.

Muitos alunos percebem que uma boa opção para separar o total em partes é usar as dezenas isoladas das unidades, o que os leva ao algoritmo da multiplicação. Assim, para 5×13 temos:



$$\begin{array}{r} 10 + 3 \\ \times \quad\quad 5 \\ \hline 15 \\ 50 + \\ \hline 65 \end{array}$$

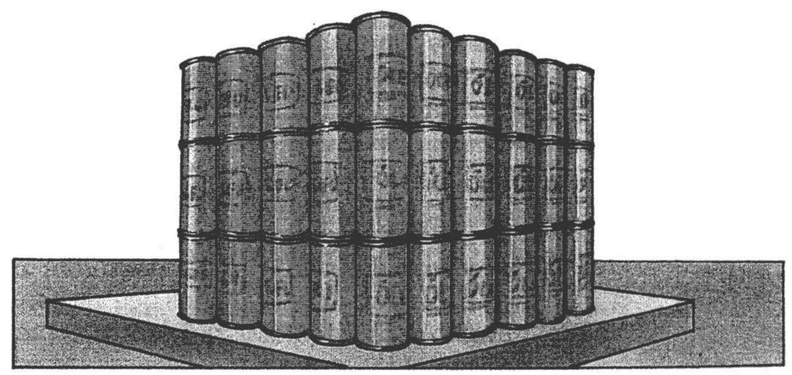
Preparando a aprendizagem futura

Observe que, ao trabalhar com "ladrilhamento", os alunos já estarão sendo familiarizados com questões relativas ao cálculo de área de superfície, bem como à descoberta da fórmula da área do retângulo.

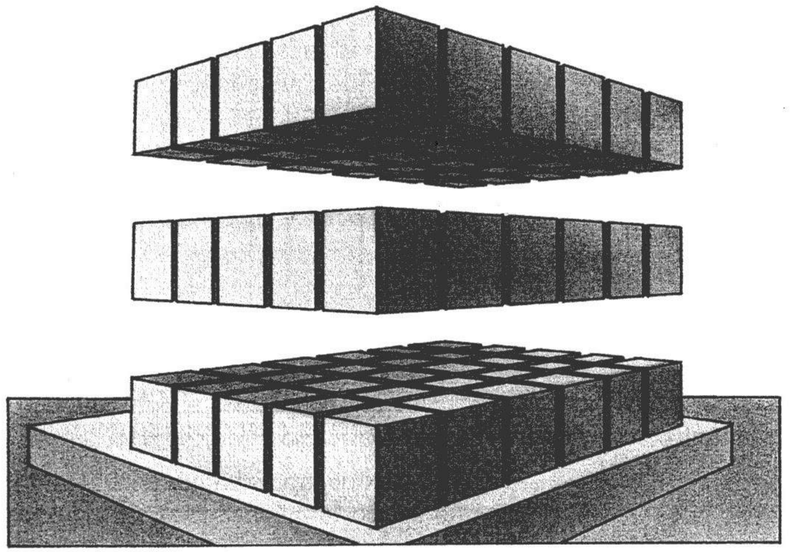
Pode-se, também, pedir aos alunos que analisem a "placa" do material dourado; eles verificam quantos cubinhos cabem nela e representam seus cálculos com uma escrita multiplicativa. Mais tarde, essa atividade será retomada, para a introdução do metro quadrado, seus múltiplos e submúltiplos.

Do mesmo modo, podem-se propor situações de "empilhamento", que estarão preparando as crianças para calcular o volume dos sólidos geométricos. Por exemplo:

Em um supermercado, foi feita uma pilha de latas de óleo. Nessa pilha, há 3 camadas de latas; em cada camada há 6 filas de 5 latas. Quantas latas foram usadas na pilha?



A representação no plano do papel não retrata com fidelidade a figura tridimensional. No máximo, podemos desenhar alguns lados em perspectiva. Por isso, é muito importante que os alunos façam a representação com material de manipulação. Assim, para representar a pilha de latas, eles podem utilizar os cubinhos do material dourado.



Ao discutir o cálculo realizado, as crianças percebem que é possível representá-lo com duas escritas multiplicativas ($6 \times 5 = 30$ e $3 \times 30 = 90$), ou com uma só ($6 \times 5 \times 3 = 90$). Com esta última forma, conseguem perceber o uso das propriedades comutativa e associativa da multiplicação e acabam encontrando o mesmo resultado por caminhos diferentes. Por exemplo:

$(6 \times 5) \times 3 = 30 \times 3 = (3 \times 3) \times 10 = 90$ ou

$(5 \times 3) \times 6 = 15 \times (2 \times 3) = (15 \times 2) \times 3 = 30 \times 3 = 90$

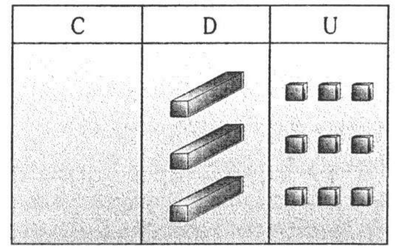
A seguir, pode-se pedir aos alunos que façam empilhamentos variados com uma certa quantidade de cubinhos (por exemplo, 36) e representem o total de peças com escritas multiplicativas. Nesse caso, é muito proveitoso que os grupos troquem de lugar entre si, para que todas as crianças possam visualizar os empilhamentos feitos pelos colegas e as respectivas escritas, bem como o caminho que usaram para encontrar o total de peças.

Então pode-se pedir aos alunos que analisem o cubo grande do material dourado e representem com uma escrita do mesmo tipo a quantidade de cubinhos que ele contém. Mais tarde, esse trabalho será retomado, quando se começar a falar no metro cúbico.

O algoritmo da multiplicação

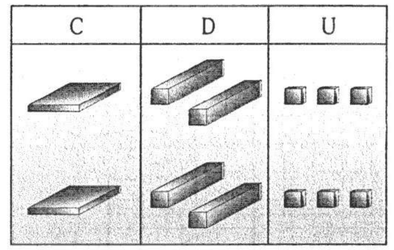
Vimos que, a partir de atividades com o papel quadriculado, pode-se chegar ao algoritmo da multiplicação. Com o ábaco de papel e as fichas, ou com o material dourado, os alunos podem também visualizar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, que fundamenta o processo que costumamos empregar para a multiplicação (mais adiante, veremos outros processos que permitem calcular o produto de dois números, sem utilizar essa propriedade).

Exemplo para 3×13:



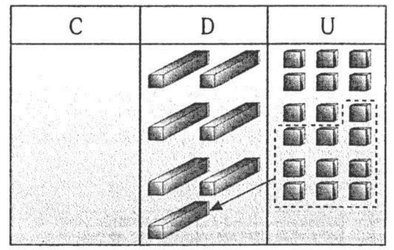
D	U
1	3
×	3
3	9

Exemplo para 2×123:



C	D	U
1	2	3
×		2
2	4	6

Da mesma forma também podem ser resolvidas, sem problemas, as situações em que há "reserva", como em 3×26:



D	U
1	
D	U
2	6
×	3
7	8

Muitas crianças fazem as contas "pela regra", sem ao menos compreender o porquê de cada procedimento. Por isso, acabam cometendo erros assim:

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times\ 3 \\ \hline 98 \end{array}$$

Isso acontece porque fazem o "vai um" (do 3 × 6) e o somam ao 2 do multiplicador antes de multiplicá-lo por 3, calculando 3 × 3 = 9.

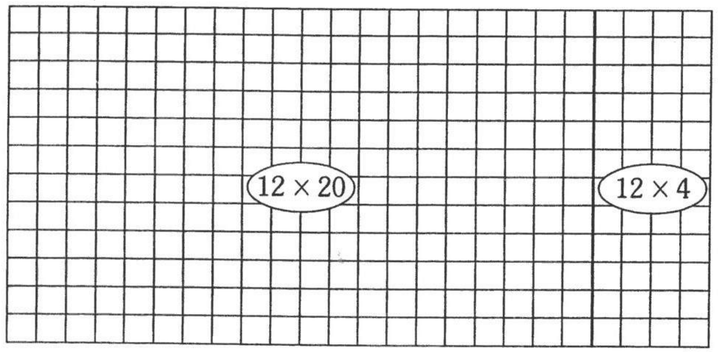
O problema do material de manipulação nas multiplicações está na grande quantidade de peças que às vezes são necessárias. Em 9 × 78, por exemplo, surgem no ábaco 9 grupos de 8 cubinhos (72 cubinhos) e 9 grupos de 7 barras (63 barras).

Ao manipular tantas peças, as crianças acabam cometendo enganos. Por isso, enquanto os alunos tiverem necessidade de material de apoio para realizar multiplicações, o professor deve apresentar números cujos algarismos representem valores pequenos.

No caso da multiplicação de dois números maiores que 10, surge a *dupla distributiva*. Por exemplo, em 12 × 24, pode-se calcular com uma distributiva simples:

$$12 \times (20 + 4) = 240 + 48 = 288$$

Quadriculado



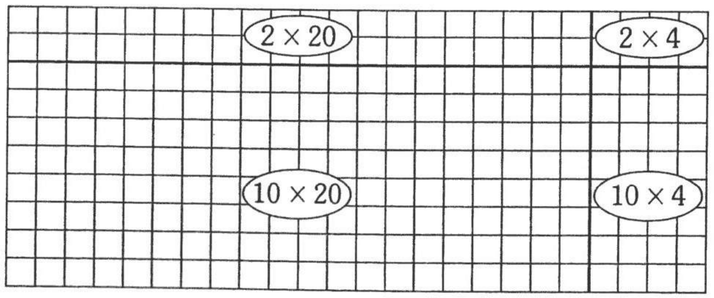
Algoritmo

$$\begin{array}{r} 20 + 4 \\ \times\ 12 \\ \hline 48 \\ 240 \quad + \\ \hline 288 \end{array}$$

Ou fazendo as duas distributivas (usadas no algoritmo tradicional):

$$(10 + 2) \times (20 + 4) = 200 + 40 + 40 + 8 = 288$$

Quadriculado



Algoritmo

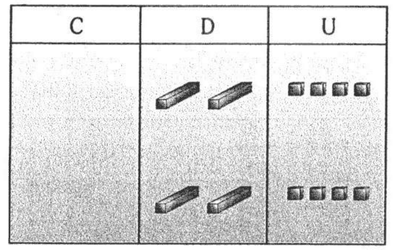
$$\begin{array}{r} 20 + 4 \\ \times\ 10 + 2 \\ \hline 40 + 8 \\ 200 + 40 + 0 \\ \hline 200 + 80 + 8 \end{array}$$

Trabalhando com agrupamentos e trocas, teremos, nas diversas ordens:

$$(1D + 2U) \times (2D + 4U) = 2C + 4D + 4D + 8U = 2C + 8D + 8U = 288U$$

Vamos fazer esse trabalho por partes:

Ábaco

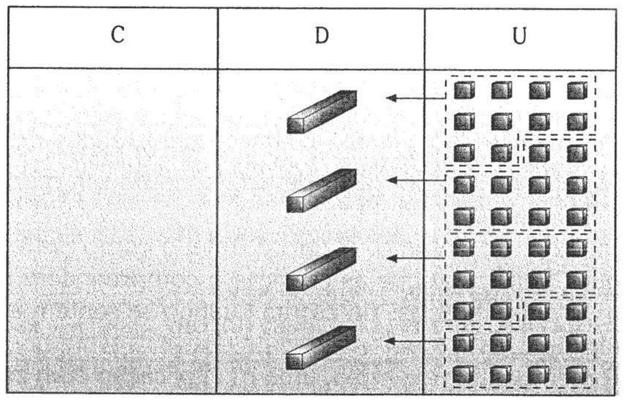


Algoritmo

C	D	U
	2	4
×	1	2
	4	8

Ao indicar a multiplicação 1D × 4U, é preciso lembrar que estamos formando 10 grupos de 4 unidades, ou 40 unidades, ou ainda: 4 dezenas.

Ábaco



Algoritmo

C	D	U
	2	4
×	1	2
	4	8
	4	0 +

É por esse motivo que, no algoritmo, sempre aparece "uma casinha vazia" no lugar das unidades. Certamente, quando se começou a usar esse algoritmo, colocava-se zero no lugar. Com o tempo, por simplificação, passou-se a deixá-lo vazio.

C	D	U
	2	4
×	1	2
	4	8
	4	0 +

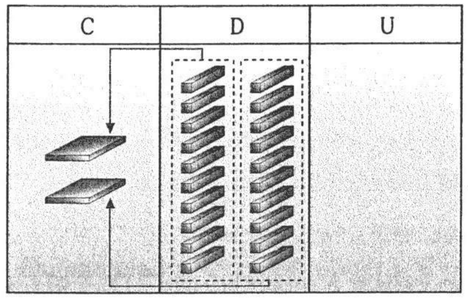
→

C	D	U
	2	4
×	1	2
	4	8 +
	4	

Qualquer tentativa de explicar esse lugar vazio por meio de artifícios, como "É o lugar do sinal de + " ou "Colocamos esse + aqui, para o 8 não cair", é pura "matemágica", não serve para desenvolver o raciocínio de ninguém.

Ao multiplicar 1D por 2D, teremos 1 dezena de grupos de 2 dezenas, ou seja, 10 grupos de 2 dezenas, que produzem 20 dezenas. Estas podem ser trocadas por 2 centenas, resultado que deve ser colocado na coluna das centenas.

Ábaco



Algoritmo

C	D	U	
	1	2	
×	2	4	
	4	8	+
2	4	0	
2	8	8	

1D × 2D = 10U × 2D = 20D = 2C

Novamente, temos uma explicação lógica para a localização do 2, sem precisar recorrer a histórias de ficção para justificar fatos matemáticos.

O zero intercalado

Quanto à questão das multiplicações com zero intercalado, antes de mais nada é preciso observar que a principal causa da dificuldade dos alunos em lidar com o zero em um algoritmo é o fato de ele ser tratado, nas operações, como um número diferente dos demais.

Quando, no entanto, o zero é tratado como outro número qualquer, verifica-se que as crianças o compreendem melhor e fazem as simplificações na escrita quando se sentem à vontade para fazê-lo.

Tomemos, por exemplo, uma multiplicação com zero intercalado. Vamos multiplicar 342 por 106. A conta deve ser feita normalmente, mesmo quando se tratar de multiplicações por zero. O algoritmo fica assim:

DM	UM	C	D	U	
		3	4	2	
	×	1	0	6	
	2	0	5	2	
	0	0	0	0	+
3	4	2	0	0	
3	6	2	5	2	

2U × 0 = 0
4D × 0 = 0
3C × 0 = 0

1C × 2U = 2C
(0 unidade e 0 dezena)

Com o tempo, os próprios alunos se encarregarão de eliminar a linha dos zeros. Em outras palavras, quando compreenderem o porquê de se deixarem vazias as casas das unidades e das dezenas.

Outros algoritmos para a multiplicação

Muitos alunos imaginam que a multiplicação (ou mesmo qualquer outra conta) só pode ser realizada pelo método que aprendem na escola. Isso os leva a crer que a matemática é uma coleção de regras que têm de ser obedecidas, pois do contrário "não dá".

Para mudar tal opinião sobre essa ciência tão rica e cheia de possibilidades de raciocínio, vamos conhecer um pouco os procedimentos usados em outros países e em outros tempos.

O método egípcio

Há 2000 anos, os egípcios não sabiam tabuadas, mas tinham grande familiaridade com duplicações. Assim, seu modo de multiplicar utilizava a adição, que era uma operação fundamental para eles, e os dobros, calculados a partir de um dos números a multiplicar. Veja, no exemplo a seguir, o cálculo de 11 × 43.

Em primeiro lugar, os egípcios construíam uma tabela de dobros para o 43 (podia ser também para o 11):

1 × 43 = 43
2 × 43 = (2 × 43) = 86
4 × 43 = (2 × 86) = 172
8 × 43 = (2 × 172) = 344
16 × 43 = (2 × 344) = 688
32 × 43 = (2 × 688) = 1 376
etc.

Depois, procuravam fazer uma decomposição do outro termo (no caso, o 11) em parcelas formadas por 2 ou potências de 2 ($2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, etc.), que, para eles, não eram potências de 2, mas os tais "dobros". Temos então 11 = = 8 + 2 + 1. Assim, usando a tabela dos dobros, os egípcios calculavam:

$$11 \times 43 = 344 + 86 + 43 = 473$$

Se o cálculo desejado fosse, por exemplo, 20 × 43, a decomposição de 20 seria:

$$20 = 16 + 4$$

Temos então, consultando a tabela:

$$20 \times 43 = 688 + 172 = 860$$

O método usado na Idade Média

Na Europa medieval, os calculistas empregavam um algoritmo semelhante ao dos egípcios, uma vez que também usavam o sistema dos dobros.

Assim, o procedimento para encontrar resultados de multiplicações era o seguinte: colocavam-se os dois números lado a lado; procurava-se, então, a metade de um deles e, por compensação, o dobro do outro. Esse procedimento era repetido até que a série das metades chegasse a 1. Na série dos dobros estaria o valor correspondente, que era o resultado da multiplicação.

Por exemplo, para obter o resultado de 16×12, os matemáticos medievais faziam:

16	12
8	24
4	48
2	96
1	192

Portanto, $16 \times 12 = 192$. Mas, e quando um dos números não tem a metade exata? Vamos calcular 12×16 para ver o que acontece:

	12	16
	6	32
→	3	64 ←
	1	128

Como 3 não tem metade exata, calcula-se sua metade aproximada para menos, ou seja, 1. Seguindo o processo anterior, o resultado seria 128. No entanto, a ele deve ser somado o valor 64, correspondente ao número que não teve metade exata: 3. O resultado da multiplicação é: $128 + 64 = 192$.

Vejamos, também, 25×18:

→	25	18 ←
	12	36
	6	72
	3	144
	1	288

O resultado é, então, $288 + 18 + 144 = 450$.

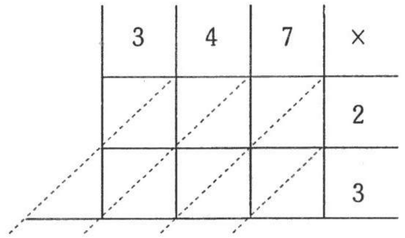
O método em reticulado

Na França, algumas escolas ainda hoje utilizam o algoritmo para multiplicação conhecido como *multiplicação em reticulado*, ou *em célula*, ou, ainda, *em gelosia*.

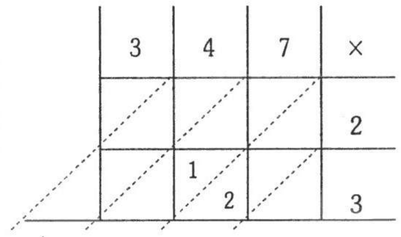
Embora não se conheça a origem desse método, sabe-se que desde o século XII, pelo menos, era usado na Índia, de onde foi levado para a China e de lá para a Arábia. Do mundo muçulmano seguiu para a Itália, e ali foi assimilado pelos venezianos, que nos séculos XIV e XV dominavam as rotas de comércio com os povos árabes. O nome *gelosia*, aliás, vem da semelhança com as janelas gradeadas usadas em Veneza e em outros locais da Itália (em italiano, *gelosia* significa "grade").

O princípio do processo é o mesmo que o nosso. O procedimento de colocar os algarismos em células evita que se cometam erros, tais como, na soma final, posicionar a dezena embaixo da unidade.

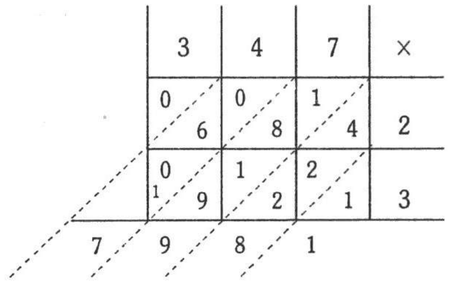
Se, por exemplo, quisermos calcular 347×23 por esse método, faremos:



Podem-se iniciar as multiplicações por qualquer uma das células. Comecemos aqui por 4×3. O resultado da operação (no caso, 12) é indicado na célula correspondente aos dois fatores, colocando-se o algarismo das unidades (2) embaixo e o das dezenas (1) em cima da diagonal pontilhada que corta a célula. Assim:



Preenchidas todas as células, calcula-se a soma dos números colocados em cada diagonal. No caso da soma ser maior ou igual a 10, o algarismo das dezenas é levado à diagonal seguinte:



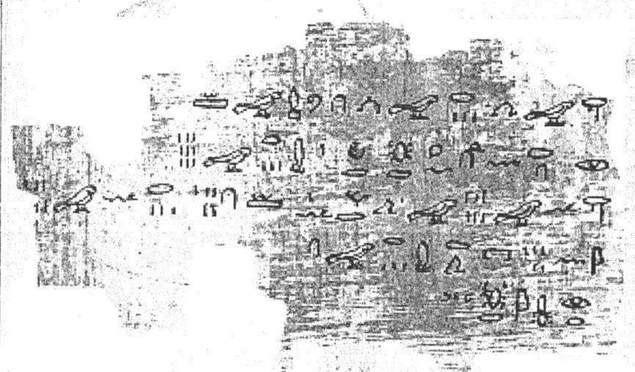
Agora, utilizando o mesmo método, tente calcular 35×42.

Um passeio pela história

Os egípcios caracterizaram-se pelas soluções práticas que encontraram para seus problemas (certamente pelo método das tentativas). Os documentos por eles deixados demonstram esse caráter prático, ao expor tão-somente a "receita", sem preocupações em explicar os porquês das soluções.

Do livro *A história da matemática*, de Carl B. Boyer, extraímos o seguinte trecho:

> Muito da nossa informação sobre a matemática egípcia vem do papiro Rhind, ou de Ahmes, o mais extenso documento matemático do antigo Egito; mas há também outras fontes. Além do papiro Kahun, [...] há um importante papiro chamado Golonishev, ou de Moscou, comprado no Egito em 1893 [...]
>
> O papiro de Moscou, escrito menos cuidadosamente que a obra de Ahmes por um escriba desconhecido da décima segunda dinastia (1890 a.C., aproximadamente), contém 25 exemplos, quase todos da vida prática e não diferindo muito dos de Ahmes.[...]
>
> O conhecimento revelado nos papiros é quase todo prático e o elemento principal nas questões eram os cálculos. Quando parecem entrar elementos teóricos, o objetivo pode ter sido o de facilitar a técnica e não a compreensão.



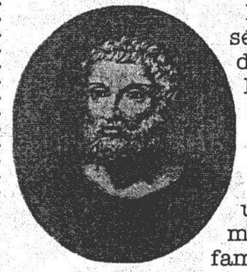
Detalhe do papiro Rhind, em que se vê o seguinte problema formulado em hieróglifos: 2/3 somados e 1/3 retirado: fica 10. Tomar 1/10 desse 10: o resultado é 1, resto 9. Dois terços disso, isto é, 6 somados ao próprio, total 15. Um terço disso é 5. Foi 5 que se tirou: resto 10.

Os documentos deixados pelos indianos mostram a mesma atitude: são listas com problemas, alguns de grande importância no dia-a-dia desse povo, e que também não apresentam grandes explicações para a solução.

Foram os gregos que iniciaram o trabalho de representar, justificar e sistematizar nas diversas ciências os conhecimentos até então acumulados pelas diversas civilizações.

Ainda do livro de Carl B. Boyer, extraímos os trechos a seguir:

> A história grega pode ser recuada até o segundo milênio a.C., quando, como invasores iletrados, vindos do norte, abriram caminho até o mar. Não trouxeram tradição matemática ou literária consigo; no entanto, tiveram desejo ansioso de aprender, e não demoraram a melhorar o que lhes ensinaram. [...]



> Então, durante o sexto século a.C., apareceram dois homens, Tales e Pitágoras, que tiveram na matemática o papel de Homero e Hesíodo na literatura. [...]
>
> Sabemos agora que uma grande massa de material matemático era familiar aos babilônios um milênio antes do tempo de Tales; no entanto, entre os gregos era aceito que Tales tinha feito progressos definidos. Parece razoável supor [...] que Tales deu uma contribuição à organização racional do assunto. [...]



> A visão pitagórica parece ter sido tão completamente abstrata e filosófica que detalhes técnicos de computação não tinham importância nenhuma para ele. Tais técnicas eram relegadas a uma ciência à parte, chamada "logística". Esta tratava da enumeração das coisas, em vez da essência e propriedades do número em si, questões que pertenciam à aritmética. [...]
>
> É por isso que Tales é freqüentemente chamado de "primeiro matemático" e Pitágoras é conhecido como "o pai da matemática".

Os trechos reproduzidos mostram a enorme diferença do enfoque dado à matemática pelos povos ao longo da história. Ainda hoje essa diversidade de visões da disciplina está presente nas salas de aula e se manifesta nas diferentes maneiras de apresentá-la aos alunos.

A idéia de proporcionalidade

A proporcionalidade constitui um dos temas de maior importância no ensino de matemática, pois é a partir dela que se formam as noções de razão, proporção, número racional, medida, regra de três, porcentagem, probabilidades, semelhança de figuras, escalas, entre outras.

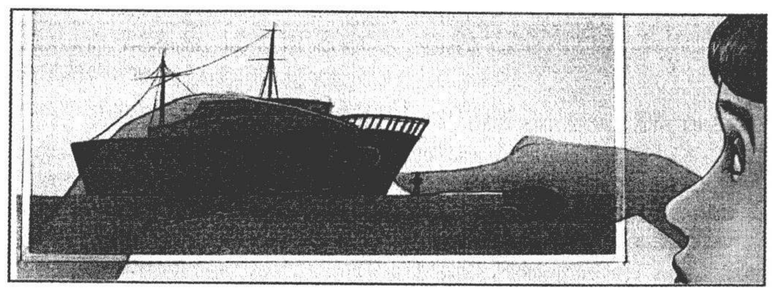
Segundo trabalhos de Piaget e Inhelder (1972), bem como de muitos outros pesquisadores — entre os quais podemos citar Lovell e Butterworth (1966), Noelting (1980) e Ruiz (1985) —, o esquema de proporcionalidade só estará completamente construído quando o aluno atingir o *período operatório formal*, por volta dos 15 anos.

No entanto, desde os primeiros anos de vida a criança já utiliza de forma prática as relações proporcionais. Isso acontece quando, visualizando o espaço que a cerca, ela imagina o tamanho de um objeto que está distante; interpreta desenhos, fotos, imagens da tevê; estima a relação entre seu tamanho e um espaço por onde quer passar; etc. Sua avaliação da realidade visualizada é qualitativa.

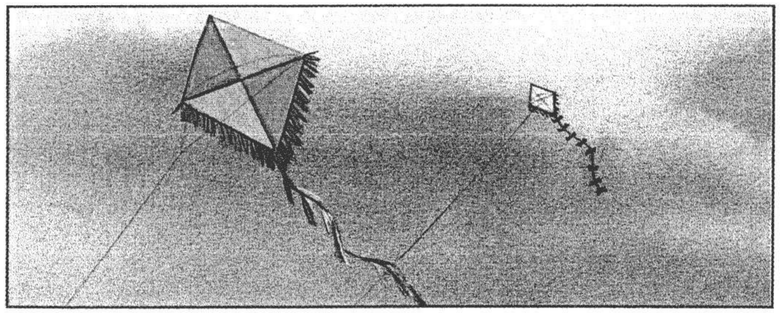
Um pouco mais tarde, surgem as primeiras tentativas de natureza quantitativa. Um episódio bem ilustrativo é relatado por Van Den Brink e Streefland (1979): um garoto de 7 anos, examinando com os pesquisadores algumas fotos de navios, perguntou sobre o tamanho da hélice de um dos barcos. Ao ouvir a resposta "Ah, é muito grande; não caberia nesta sala", o garoto concordou, entusiasmado: "É mesmo! Na escola eu vi uma outra foto dessas, onde aparece um homem ao lado do barco. O barco tinha isto (mostrando 3 dedos) de tamanho e o homem tinha isto (mostrando 1 dedo)".

Freudenthal (1983) conclui, de suas pesquisas, que desde muito cedo a criança adquire a capacidade de identificar:

- objetos ou signos que se diferenciam por suas dimensões;



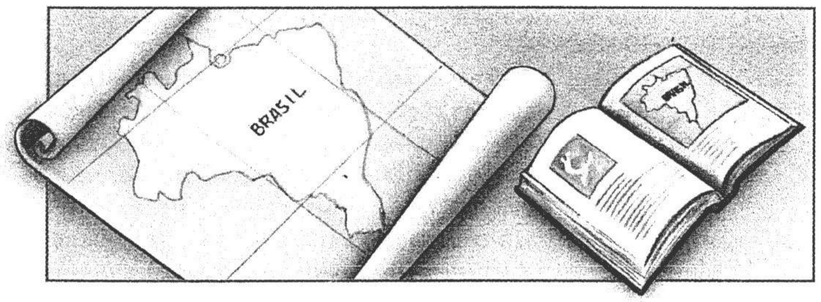
• o mesmo objeto, a distâncias diferentes;



• um objeto e sua imagem;



• duas imagens do mesmo objeto, em escalas diferentes.



Apesar do uso prático no cotidiano, o conceito de proporcionalidade apresenta grandes dificuldades em termos de formulação e aplicação. Cabe à escola colocar os alunos em situações bastante simples nas quais pratiquem, de modo intuitivo, a idéia de proporção. Com a familiarização, inicia-se a etapa do estabelecimento de relações, da descoberta de propriedades, que os levará ao conceito de proporcionalidade.

Com relação às dificuldades apresentadas pelos alunos nessa área, Freudenthal afirma estar convencido de que:

> [...] é por culpa de um ensino mal-organizado que receberam. Na idade em que se é mais sensível à geometria, só se ensinam os cálculos aritméticos. Ignora-se a fonte geométrica, origem da proporcionalidade, e perde-se a ocasião de tornar explícito e de levar à verbalização esse tesouro implícito e inconsciente das idéias geométricas.
>
> (Apud MORA e AYMEMI, 1990.)

No capítulo 8, dedicado à geometria, voltaremos a tratar desse tema. No que se refere à aritmética, as primeiras idéias ligadas à proporcionalidade começam a ser construídas pelas crianças a partir de *situações-problema multiplicativas*. Nesse tipo de problema temos duas ou mais grandezas de natureza diferente relacionadas, e o resultado que se busca é da *mesma natureza* de uma delas. Veja os exemplos a seguir:

a) Distribua 3 lápis para cada aluno de seu grupo. Se forem apenas 2 alunos, quantos lápis você deverá pegar? E se forem 4 alunos? E se forem 9?

Aqui, estamos trabalhando com as grandezas *quantidade de lápis* e *quantidade de pessoas*; e o resultado procurado é *quantidade de lápis*.

Uma vez realizada concretamente a experiência, é importante fazer uma *representação* da situação. Pode-se organizar uma tabela, para que as crianças observem a variação das duas grandezas (quanto mais alunos no grupo, mais lápis serão usados).

Alunos no grupo	1	2	4	9
Total de lápis	3	6	12	27

b) Um pacote de sulfite tem 100 folhas. Quantas folhas há em 6 pacotes?

As grandezas envolvidas são *quantidade de folhas* e *quantidade de pacotes*; a solução será dada em *quantidade de folhas*. Tal como no caso anterior, é importante chamar a atenção dos alunos para a variação proporcional que se estabelece entre as duas grandezas (quanto mais pacotes, mais folhas):

Pacotes	1	2	3	4	5	6
Folhas	100	200	300	400	500	600

É importante enfatizar as relações: 4 pacotes são o dobro de 2 pacotes, e a quantidade correspondente (400 folhas) também é o dobro da quantidade (200 folhas); ou 6 pacotes são o triplo de 2 pacotes, do mesmo modo que 600 folhas são o triplo de 200 folhas.

c) Dona Maria gasta 4 ovos para fazer um bolo. Ela precisa fazer 5 bolos. Quantos ovos irá usar?

Nesse problema, as grandezas são *quantidade de ovos* e *quantidade de bolos*; e o resultado procurado é *quantidade de ovos*.

Novamente, deve-se enfatizar que, se a quantidade de bolos aumenta 5 vezes, a quantidade de ovos também aumenta 5 vezes:

1 bolo —— 4 ovos
5 bolos —— 5 × 4 ovos

A partir dessas situações, podem ser explorados cálculos mentais que se apóiem na idéia de proporcionalidade. Por exemplo: Sabendo que 2 × 15 = 30, quanto seria 4 × 15? E 6 × 15?

d) Ao comprar entradas de circo para um certo número de crianças, a escola gastou 60 reais. Para levar o dobro de crianças, quanto irá gastar?

Esse tipo de cálculo geralmente não é utilizado em nossas escolas. No final de 1981, a Secretaria de Estado da Educação de São Paulo comprovou isso numa pesquisa que realizou para avaliar a situação do ensino de matemática nas escolas da rede (LAMPARELLI, 1981).

Para 3 040 alunos no final da 2ª série, foi apresentado este problema: Uma dúzia de laranjas custa Cr$ 70,00. Quanto uma pessoa deve pagar por uma dúzia e meia de laranjas?

A porcentagem de respostas corretas ficou em apenas 4,6%. A explicação para tal resultado foi que esse tipo de problema é tradicionalmente resolvido por *redução à unidade*. Como 70 não é múltiplo de 12, os alunos não conseguiram descobrir o preço de uma laranja (70 ÷ 12) e, assim, não puderam dar prosseguimento ao raciocínio tradicional.

Apenas 4,6% dos alunos perceberam que, em 1 dúzia de laranjas, há 2 meias dúzias e em 1 dúzia e meia há 3 meias dúzias, o que levaria ao total de Cr$ 105,00 sem maiores dificuldades:

70 ÷ 2 = 35 (preço de cada meia dúzia);

logo, 35 × 3 = 105 (preço de 1 dúzia e meia).

Para alunos já no final da 4ª série, foi proposto o problema: 8 pêssegos custam Cr$ 70,00. Quanto gastarei se comprar 12 pêssegos?

O problema era semelhante ao proposto para a 2ª série, porém sem referências à relação entre 8 e 12. Os próprios alunos teriam de descobrir que 8 é o dobro de 4, e 12 é o triplo de 4, estendendo essa relação aos preços.

Dos 3 087 alunos que fizeram a prova, apenas 0,4% usaram o raciocínio proporcional, ou seja, acharam o preço de 4 pêssegos calculando a metade de 70 e somaram os 35 encontrados aos 70 (ou multiplicaram os 35 por 3), encontrando assim o preço dos 12 pêssegos.

Um total de 15,6% dos alunos conseguiram acertar a questão, usando o raciocínio de redução à unidade: encontraram o resultado de 70 ÷ 8 (com números decimais) e multiplicaram o resultado por 12.

Os problemas de contagem

Os problemas de contagem envolvem grandezas de diversas naturezas, e a solução é de uma terceira natureza. Oferecem-se às crianças, por exemplo, 3 tipos de latas vazias (de refrigerante, de achocolatado, de massa de tomate) e 2 tipos de fios (barbante e lã), e pede-se que construam telefones de brinquedo, mas com latas do mesmo tipo nas duas extremidades:



Pergunta-se às crianças: "Vamos ver quantos tipos diferentes de telefone vocês conseguem fazer?"

As grandezas aqui envolvidas são *tipos de latas* e *tipos de fios*; e a grandeza final procurada é *tipos de telefones de brinquedo*.

Naturalmente, os alunos das séries iniciais só têm condições de resolver esse problema na ação, ou seja, tentando todas as combinações de materiais que puderem, até esgotar as possibilidades.

Segundo a idéia do currículo em espiral, de Bruner, o trabalho pode começar nas séries iniciais apenas como uma atividade de familiarização, sem a menor pretensão de que as crianças cheguem a se conscientizar do raciocínio combinatório aí envolvido.

Para alunos de 3ª ou 4ª série, depois de realizada essa experiência podem-se oferecer algumas representações da solução encontrada, como a tabela de dupla entrada ou o diagrama de árvore.

Tabela de dupla entrada:

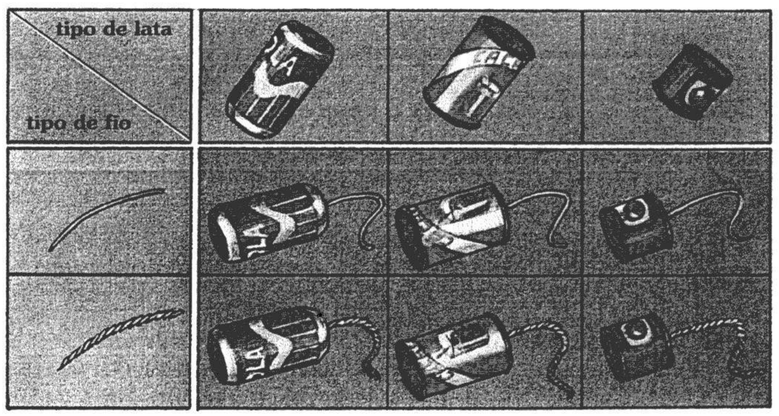
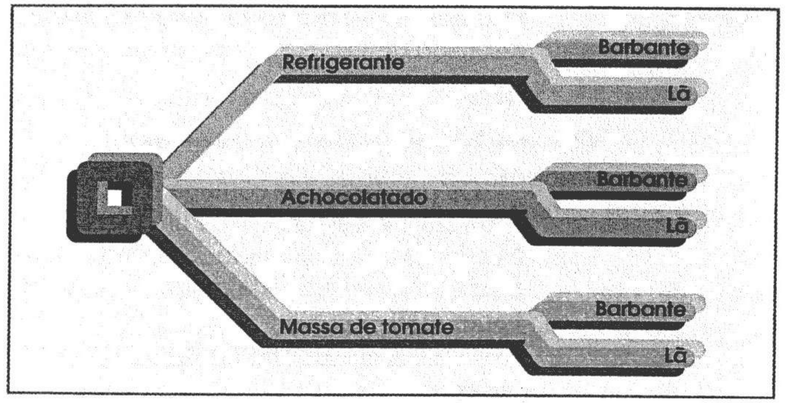


Diagrama de árvore:



Usando contagens, os alunos irão descobrir que o total de telefones pode ser encontrado pela multiplicação das quantidades de variações de cada grandeza. No caso:

Grandezas	Tipos de lata	Tipos de fio
Variações das grandezas	3	2

Portanto, o total de telefones é $3 \times 2 = 6$.

Atividades com problemas de contagem

Para executar atividades com problemas de contagem, é muito importante que os alunos disponham de material de manipulação, a fim de concretizarem as situações-problema. Vejamos a seguir alguns exemplos desse tipo de atividade:

1. Apresentar aos alunos figuras recortadas em cartolina e pedir que montem casinhas, todas diferentes em algum aspecto, com os seguintes materiais:

a) 20 retângulos iguais, brancos — o corpo da casa (os alunos deverão usar quantos forem necessários);

b) 2 tipos de telhados (triângulo, trapézio), sendo cada um em 3 cores (amarelo, vermelho, marrom);

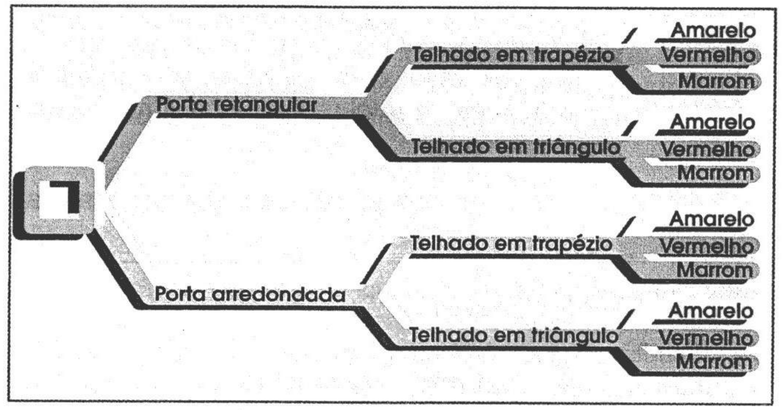
c) 2 tipos de porta (retangular, arredondada), em verde.

Os alunos das séries iniciais farão as construções por tentativa. Para os alunos das séries mais adiantadas, pode-se pedir que organizem os dados em tabelas de dupla entrada ou diagramas de árvore, para conferir se encontraram realmente todas as soluções possíveis.

Quando o problema envolve apenas duas grandezas (como no caso dos telefones de brinquedo, em que há tipo de lata e cor de fio), a tabela de dupla entrada é até bem simples. Porém,

quando envolve mais de duas variáveis (tipo de telhado, cor de telhado e tipo de porta), a tabela se torna mais difícil de organizar.

É mais fácil a utilização do diagrama de árvore:



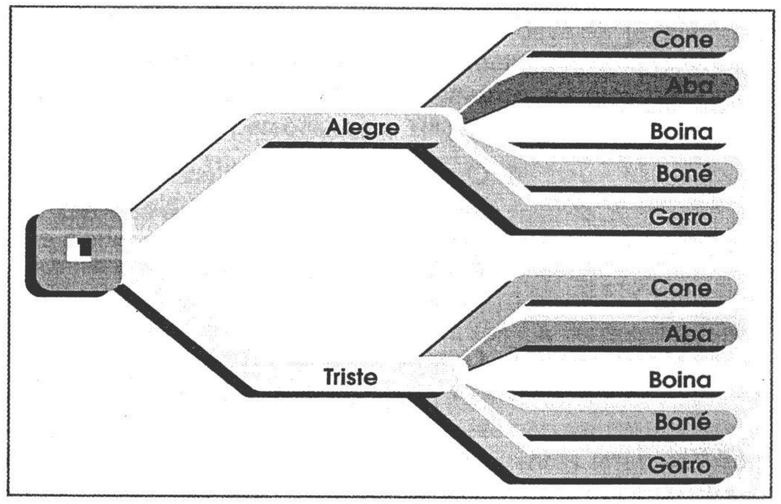
O mesmo tipo de atividade pode ser feito com a montagem de diversos palhacinhos, com caretas e modelos de chapéus. Vamos imaginar o seguinte problema:

2. Com 2 tipos de caretas e 5 tipos de chapéus, quantos palhacinhos diferentes poderemos fazer?

Sabemos que são 10 os palhaços que procuramos ($2 \times 5 = 10$). Devemos, então, oferecer aos alunos uma quantidade maior de figuras, para que eles próprios façam as montagens e descubram o total de palhaços. Assim:

a) 6 caretas de cada tipo (6 alegres e 6 tristes);

b) 2 chapéus iguais de cada tipo (2 em formato de cone, 2 bonés, 2 de aba larga, 2 boinas, 2 gorros).



Para os alunos de 3ª ou 4ª série, depois de realizada a atividade, pede-se que organizem a tabela de dupla entrada ou o diagrama de árvore, para conferir se o total de palhaços que conseguiram está correto.

Alguns problemas da seção a seguir podem ser apresentados aos alunos dessa fase como desafio. As crianças poderão resolvê-los com desenhos, com o diagrama de árvore, com a tabela de dupla entrada ou simplesmente fazendo uma multiplicação.

Para você fazer



1. Com os conhecimentos atuais sobre as operações e suas propriedades, como poderíamos explicar o processo egípcio de multiplicação? A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição era necessária?

2. Para encher determinada fôrma de bolo, dona Marta tem a receita certa:

   4 xícaras (de chá) de farinha
   3 xícaras (de chá) de açúcar
   6 ovos
   1 colher (de sopa) de fermento
   1/2 litro de leite

   Porém, dona Marta quer fazer um bolo para uma fôrma que é metade daquela. Que receita deve usar? E se ela quiser um bolo com o triplo do tamanho, de que receita precisará?

3. Uma caixa com 30 ovos é vendida a R$ 2,50 na avícola. Ana e Tereza compraram uma caixa em sociedade, e Ana ficará com 1 dúzia e meia de ovos. Que parte do total ela deverá pagar?

4. Quantos uniformes diferentes os jogadores do time Arranca Toco podem formar, se eles têm 3 camisas diferentes e 3 tipos de calção? Construa a tabela e o diagrama de árvore. Depois, planeje o material a ser oferecido aos alunos mais novos.

5. Crie agora seus problemas de raciocínio combinatório.

IV. Divisão

A divisão está relacionada à subtração. Na verdade, ela é uma subtração reiterada de parcelas iguais, por isso apresenta questões semelhantes às daquela operação.

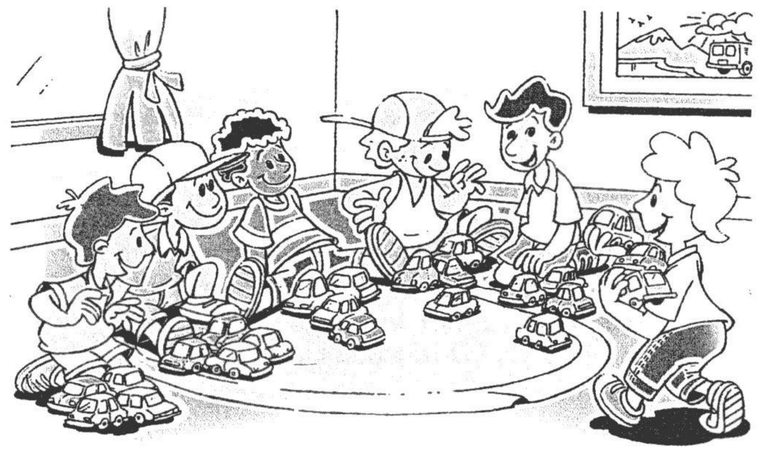
O primeiro ponto que podemos destacar é o fato de a divisão estar ligada a duas diferentes idéias, *repartir igualmente* e *medir*, sendo a primeira bem mais enfatizada que a segunda.

A idéia de repartir igualmente

Observe a seguinte situação:

Luís tem 23 carrinhos e quer reparti-los igualmente entre seus 5 convidados. Como poderá fazer isso?

Supondo que Luís ainda não tenha decorado a tabuada, ele irá distribuir os carrinhos entre seus amigos de um em um, até que se torne impossível continuar distribuindo igualmente.



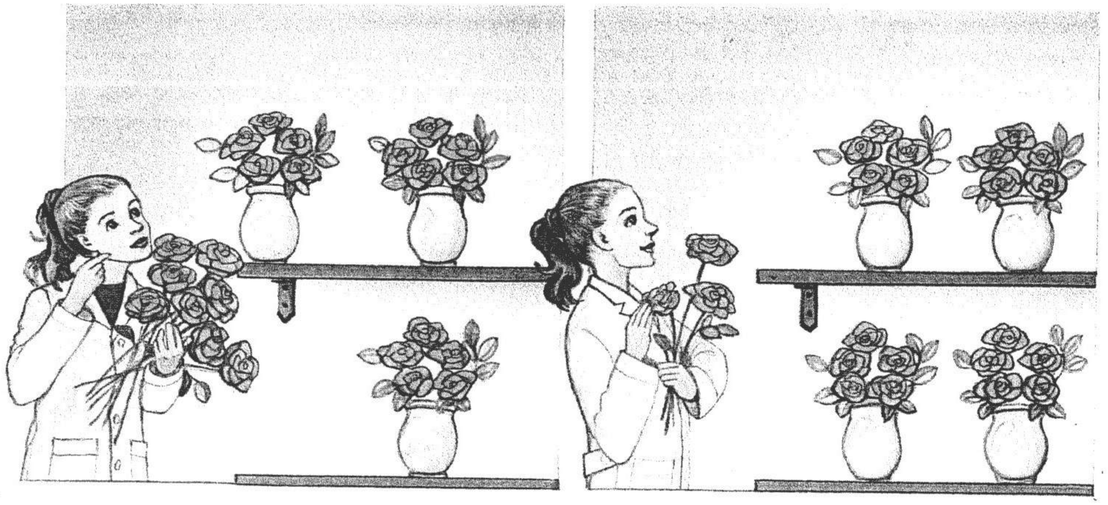
Nesse caso, sabe-se que a distribuição deve ser feita entre 5 crianças, mas não se sabe quantos elementos ficarão para cada uma. Essa é a idéia de *repartir igualmente*, e é também a idéia que a maioria das pessoas tem a respeito da divisão.

A idéia de medir

Vejamos o que acontece no seguinte problema:

Uma florista tem 23 rosas para fazer arranjos. Como quer colocar 5 rosas em cada arranjo, quantos ela conseguirá fazer?

Vamos supor que, tal como o garoto do exemplo anterior, a florista também não saiba a tabuada. Como um arranjo deve ter 5 rosas, ela irá montar um de cada vez até não ser mais possível. Assim, só no final da ação ela saberá quantos arranjos foram feitos.



Temos aqui, portanto, uma situação contrária à anterior: sabemos quantos elementos há em cada grupo, mas não sabemos quantos grupos serão formados. Essa é a idéia de medir.

Sempre que queremos medir uma grandeza, escolhemos como *unidade de medida* uma grandeza da mesma espécie daquela que se quer medir e a tomamos como padrão. Por exemplo, para medir a largura de uma quadra esportiva, podemos usar como unidade-padrão o nosso passo, um pedaço de barbante, uma vareta, o nosso palmo, etc.

Os dois problemas anteriores podem ser resolvidos com a mesma conta:

$$23 \div 5$$

No entanto, os alunos não conseguem acreditar que situações resolvidas por ações tão diferentes possam ser solucionadas da mesma maneira.

Outra questão fundamental, no caso, é a *natureza dos elementos* envolvidos em cada cálculo. No primeiro problema, temos:

23 (carrinhos) ÷ 5 (crianças) = 4 (carrinhos por criança)

A natureza do resultado é a mesma da grandeza que foi dividida (carrinhos/carrinhos).

Já no segundo problema, temos:

23 (rosas) ÷ 5 (rosas) = 4 (arranjos)

Aqui, a natureza do resultado é diferente da natureza da grandeza que foi dividida (rosas/arranjos).

Quando trabalhamos com problemas que envolvem números pequenos, como os que foram apresentados, os alunos com certeza não consideram necessário fazer contas: eles agem exatamente como foi descrito. No entanto, quando trabalhamos com quantidades maiores, os alunos precisam realizar alguma operação. Isso deve ficar claro para eles, e o professor pode direcioná-los para essa conclusão sugerindo situações semelhantes, mas com quantidades bem maiores, como:

- E se fossem 435 carrinhos para serem distribuídos igualmente entre 5 lojas?
- E se a florista tivesse 435 rosas para fazer arranjos com 5 rosas em cada um?

Assim, os alunos começarão a perceber a importância de associar uma operação matemática à ação realizada, mesmo quando se trata de números pequenos, tomando consciência de que a operação é um instrumento de ajuda nos cálculos.

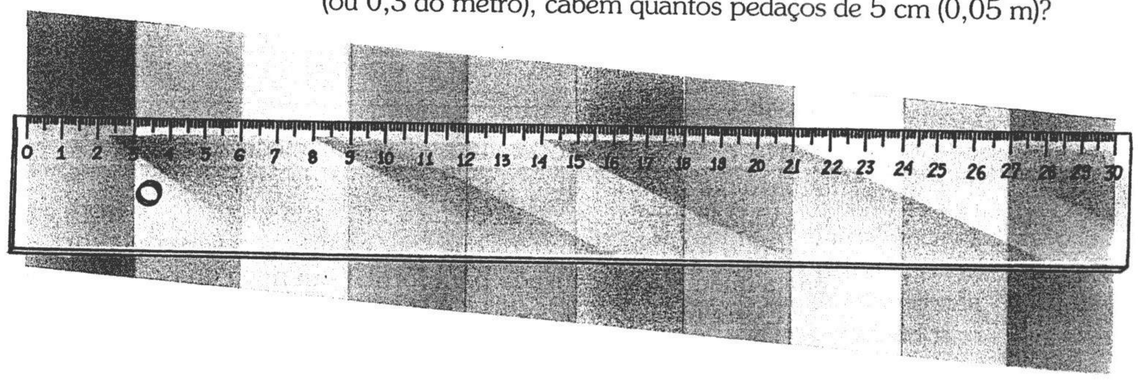
Enquanto forem trabalhadas apenas situações que envolvam números naturais, fáceis de concretizar, os alunos não terão muita dificuldade para resolvê-las. No entanto, em situações de concretização menos simples, como no caso de números decimais, começam a surgir as dificuldades ligadas ao enfoque dado à divisão.

É comum, por exemplo, alunos de 2º grau olharem com profunda desconfiança para resultados como 0,3 ÷ 0,05 = 6.

Eles raciocinam assim: "Se não havia nem 1 inteiro para ser repartido, como ficaram 6 inteiros para cada um?".

A questão, naturalmente, é que nesse caso não estamos repartindo igualmente, mas medindo quantas vezes 0,05 está contido em 0,3.

Para facilitar esse raciocínio, vamos concretizar a situação com medidas de comprimento. Em uma régua comum, de 30 cm (ou 0,3 do metro), cabem quantos pedaços de 5 cm (0,05 m)?



Vemos que, realmente, são 6 pedaços.

O resto da divisão

Uma coisa que deve ficar clara para os alunos, desde o início, é a relação entre o resto e o divisor: o resto deve ser sempre *menor* que o divisor. Para isso, é necessário que vivenciem e discutam situações como, por exemplo, a do menino que quer repartir igualmente 23 carrinhos entre seus 5 amigos: o que acontece se ele der 1 carrinho para cada um? E se der 2, 3 e 4? O professor pode sugerir que organizem uma tabela:

Quantidade de carrinhos para cada menino	Total de carrinhos distribuídos	Total de carrinhos que sobram	Pode-se dar *mais 1* carrinho para cada menino?
1	5	18	Sim
2	10	13	Sim
3	15	8	Sim
4	20	3	Não

Assim, a divisão no sentido de "repartir igualmente" significa que se procura o *maior número possível de elementos em cada um dos grupos fixados* (o divisor); portanto, o total de elementos que sobram (resto) deve ser *menor* que o total de grupos fixados.

Do mesmo modo, poderia ser discutido o caso da florista:

Quantidade de arranjos feitos	Total de rosas usadas nos arranjos	Total de rosas que sobram	Pode-se fazer *mais 1* arranjo?
1	5	18	Sim
2	10	13	Sim
3	15	8	Sim
4	20	3	Não

No caso da divisão ligada à idéia de "medir", pretende-se determinar a *maior quantidade possível de grupos*, com uma quantidade prefixada de elementos em cada grupo (o divisor). Assim, o total de elementos que sobram (resto) deve ser *menor* que a quantidade prefixada para formar um novo grupo.

Existe ainda outra questão relacionada com o resto que geralmente não fica bem-resolvida, pela falta de discussões aprofundadas: a função do resto em cada situação-problema. Acompanhe os exemplos a seguir:

a) Quero repartir igualmente 27 livros entre 4 pessoas. Quantos livros poderei dar a cada uma?

$$\begin{array}{r|l} 27 & 4 \\ \hline 3 & 6 \end{array}$$

No caso, cada pessoa receberá 6 livros, e os 3 que sobram, sobram *mesmo,* não influenciando o resultado da conta realizada.

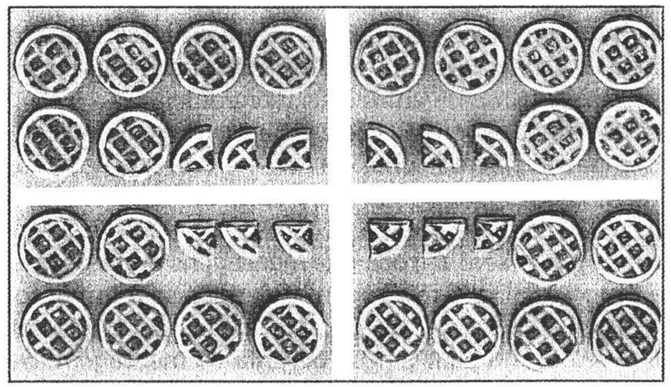
b) Uma classe de 27 alunos vai fazer uma excursão, mas a escola não dispõe de ônibus. Cada professor pode levar 4 alunos em seu carro. Quantos professores deverão ser convocados para a excursão?

$$\begin{array}{r|l} 27 & 4 \\ \hline 3 & 6 \end{array}$$

Agora 6 professores conduzirão 24 alunos, e sobrarão 3. Porém, esses 3 alunos também devem ir ao passeio. A resposta do problema não será exatamente o resultado da conta, pois a situação exige que ele seja aumentado em 1 unidade: 7 professores deverão ser convocados.

c) Uma senhora fez 27 tortas para repartir igualmente entre 4 creches. Como ela deseja que o *total* das tortas seja distribuído, que porção caberá a cada creche?

$$\begin{array}{r|l} 27 & 4 \\ \hline 3 & 6 \end{array}$$



Nesse caso, como cada torta que sobrou é uma grandeza de natureza contínua (e, portanto, possível de ser subdividida), o resultado da divisão poderá ser expresso por um número racional: $6\,3/4$. Cada creche receberá 6 tortas inteiras e $3/4$ de outra.

Por esses exemplos, podemos verificar que a mesma divisão foi efetuada em diferentes problemas, conduziu a resultados diferentes (6, 7 e $6\,3/4$, respectivamente), influenciados pelo resto da divisão e pelo contexto do problema.

Depois das considerações sobre as idéias ligadas à divisão (a idéia de repartir igualmente, a idéia de medir e o resto), podemos pensar em como a divisão pode ser trabalhada desde as séries iniciais, ou seja, na seqüência dos conteúdos.

Sabemos que as crianças, desde muito cedo, têm o hábito de repartir coisas entre si, e também de fazer agrupamentos

com a mesma quantidade de objetos. Na escola, esse comportamento deve ser explorado e ampliado em situações do cotidiano da sala de aula.

Os fatos fundamentais da divisão vão surgindo à medida que o aluno constrói os fatos fundamentais da multiplicação e amplia a mobilidade de seu pensamento (reversibilidade).

A sala de aula oferece todos os dias inúmeras oportunidades para o aluno vivenciar as idéias de divisão: "Você consegue repartir igualmente estas 20 folhas de sulfite entre os 5 colegas do seu grupo?"; "Com os 30 alunos da classe, vamos formar equipes de 6 alunos?"; "Agora arrumem a classe, colocando todas as carteiras em 5 fileiras com a mesma quantidade"; "Tenho estes 60 lápis, para repartir igualmente entre todos os alunos da classe. Como podemos fazer isso?".

Desse modo, as situações ligadas à divisão estarão presentes o tempo todo na vida do aluno, sendo sistematizadas aos poucos.

Na divisão também nos deparamos com a dificuldade de dar significado à representação simbólica. É necessário que o aluno perceba a função da escrita representativa da ação por ele realizada como *elemento de comunicação*. Assim, conforme os alunos vão criando seus próprios modos de comunicar os resultados encontrados, o professor pode ir apresentando o modo formal, como um meio de comunicação universal.

Atividades com a divisão

Com a classe organizada em grupos, ofereça aleatoriamente algumas fichas a cada grupo (no máximo 30) e peça aos alunos que as repartam igualmente entre seus integrantes.

Depois, os alunos devem elaborar uma mensagem, indicando o que aconteceu com as fichas: quantas eram, quantas couberam a cada membro do grupo e, no caso de haver sobrado fichas, quantas restaram.

O próximo passo será a troca das mensagens entre os grupos. Cada grupo analisa a mensagem e verifica se a tarefa foi realizada de modo correto. Para isso, os alunos poderão usar suas próprias fichas e repetir a ação descrita na mensagem. Se necessário, o professor fornecerá mais fichas ao grupo.

Em seguida, a classe discute o tipo de mensagem que cada grupo elaborou: uma frase, um esquema, uma figura, etc. Pode-se estabelecer qual das mensagens foi mais fácil de decifrar. Nesse momento, o professor pode introduzir a representação euclidiana da divisão:

> A partir de dois números naturais quaisquer a e b, sendo $b \neq 0$, é sempre possível determinar os números naturais q e r, tais que $a = q \times b + r$ (com $0 \leq r < b$).

Por exemplo, em um grupo de 6 alunos que tivesse recebido 32 fichas, a representação seria $6 \times 5 + 2 = 32$.

Em um grupo em que não houve sobra de fichas (resto zero), o professor aproveita a oportunidade e associa o fato à multiplicação. Por exemplo, se o grupo tem 6 pessoas e recebeu 24 fichas, a escrita fica assim: $6 \times 4 + 0 = 24$, que pode ser abreviada para $6 \times 4 = 24$. Assim, a *divisão exata* está diretamente associada à *multiplicação*. Daí, a representação $24 \div 6 = 4$.

O professor explica aos alunos que essa representação é adotada universalmente para comunicar situações de repartir igualmente. Agora, cada grupo já pode representar sua atividade com essa nova escrita.

Com as barras Cuisenaire, pode-se trabalhar essa escrita ligada à idéia de medir. Usando tijolos de uma cor só, um aluno construiu dois muros, formando um muro de 12 tijolos. Ele representou a escrita multiplicativa da seguinte maneira: $2 \times 6 = 12$, porque 2 muros de 6 tijolos formam um de 12. Agora, ele pode escrever $12 \div 6 = 2$, porque "dentro do muro de 12 tijolos cabem 2 muros de 6".

Temos aqui, novamente, a delicada questão da comutatividade ligada à multiplicação. Para a criança, não é claro que de $2 \times 6 = 12$ saiam as seguintes representações:

$12 \div 6 = 2$ (ligada a 2×6) e $12 \div 2 = 6$ (ligada a 6×2)

Com as barras Cuisenaire, pode-se trabalhar também a representação euclidiana da divisão através de propostas como: "Com muros de 6 tijolos, como podemos formar um muro de 15 tijolos?".

Por meio de experimentações, o aluno conclui que 3 muros de 6 é muito e 2 muros de 6 é pouco. Ele pode completar o que falta com o muro adequado, representando isso com uma escrita:



$2 \times 6 + 3 = 18$



A própria criança deve chegar a essa constatação, a partir de diversas experiências com o material.

Com relação à idéia de repartir igualmente, pode-se pedir aos alunos que descubram quantos colegas podem escolher para repartir igualmente 12 tampinhas, sem que sobre nenhuma. Em seguida, eles anotam os resultados possíveis. Por exemplo: $12 \div 2 = 6$, $12 \div 3 = 4$, $12 \div 4 = 3$, etc.

Dessa forma, os alunos podem chegar à conclusão de que não é possível repartir igualmente as 12 tampinhas com 5 colegas, por exemplo.

À medida que essas experiências vão sendo realizadas, os valores obtidos tornam-se conhecidos e memorizados pelos alunos. Pode-se, então, iniciar o trabalho com a técnica operatória da divisão.

O algoritmo da divisão

Esse é um assunto que provoca muitas discussões entre os professores. Enquanto uns argumentam em favor do método breve, outros defendem enfaticamente o processo longo.

No *processo euclidiano de divisão*, costuma-se denominar *processo longo* aquele em que a subtração é indicada no algoritmo, aparecendo o produto do quociente pelo divisor. Por exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 843 & 17 \\ \cline{2-2} -\ 68 & 49 \\ \cline{1-1} 163 & \\ -\ 153 & \\ \cline{1-1} 10 & \end{array}$$

No chamado *processo breve*, só se representa o resultado da subtração entre o dividendo e o produto do quociente pelo divisor, assim:

$$\begin{array}{r|l} \overline{843} & 17 \\ \cline{2-2} 163 & 49 \\ 10 & \end{array}$$

Em termos de aprendizagem, no entanto, não faz diferença que a criança utilize esse ou aquele processo, desde que compreenda o que está fazendo. Se os alunos tiverem liberdade para procurar o quociente da maneira que acharem melhor — em vez de decorarem um procedimento destituído de significado para eles —, o trabalho com a divisão se tornará muito mais enriquecedor.

Do ponto de vista pedagógico, talvez seja melhor iniciar o trabalho com divisão pelo processo longo, que permite aos alunos conhecerem, passo a passo, os procedimentos que se apresentam resumidos no processo breve. Obviamente, o cálculo por aproximação, que caracteriza este último, é muito eficiente, mas é importante que os alunos o tenham incorporado de maneira consistente.

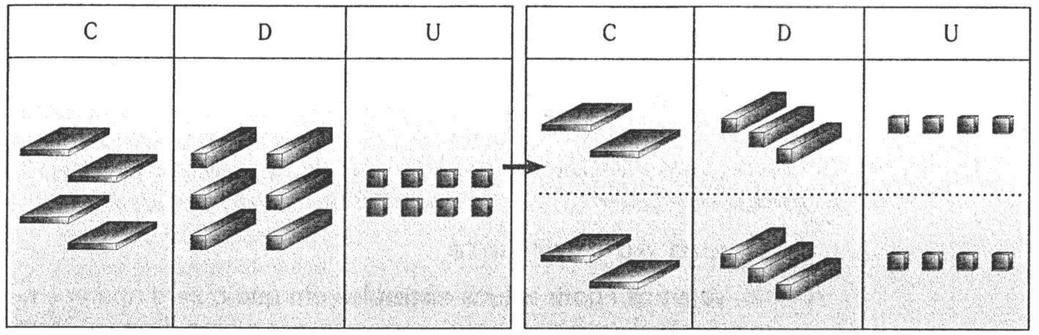
Não nos deteremos aqui na descrição do processo breve, uma vez que se trata de um método bastante usual e que envolve, basicamente, cálculo mental. Os alunos naturalmente chegarão a ele à medida que forem dominando o processo da divisão.

Processo longo

Inicialmente, os alunos realizam as divisões no ábaco de papel usando fichas, material dourado, "dinheiro", ou qualquer outro material construído na base 10. A seguir, fazem no caderno a representação das ações realizadas.

Na primeira etapa do trabalho, o professor deve propor divisões com números cujos algarismos representem números que sejam todos múltiplos do divisor. Tomemos como exemplo $468 \div 2$.

No ábaco, teríamos:



Para achar o resultado, o aluno intuitivamente usa a propriedade distributiva da divisão em relação à adição:

$$\begin{aligned} 468 \div 2 &= (4C + 6D + 8U) \div 2 = \\ &= (4C \div 2) + (6D \div 2) + (8U \div 2) = \\ &= 2C + 3D + 4U = \\ &= 234 \end{aligned}$$

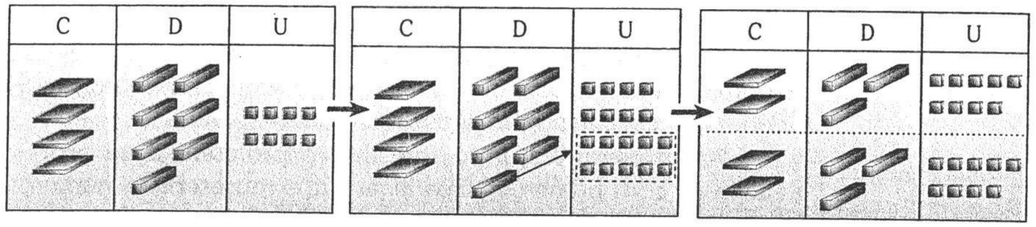
No algoritmo, temos:

C	D	U			
4	6	8	2		
− 4	− 6	− 8	2	3	4
0	0	0	C	D	U

O procedimento de indicar as ordens que serão procuradas no quociente é simples e, no entanto, muito eficiente para evitar muitos tipos de erro, especialmente quando um dos algarismos do quociente é o zero.

A seguir, podem-se propor números em que nem todos os algarismos do dividendo sejam múltiplos do divisor, como $478 \div 2$. Os alunos familiarizados com o trabalho de agrupar e trocar fazem naturalmente a troca de 1 D, que sobrou, por 10 U:

No ábaco



No algoritmo

C	D	U
4	7	8^1
4 −	6 −	10 +
0	1	18
		18 −
		0

2		
2	3	9
C	D	U

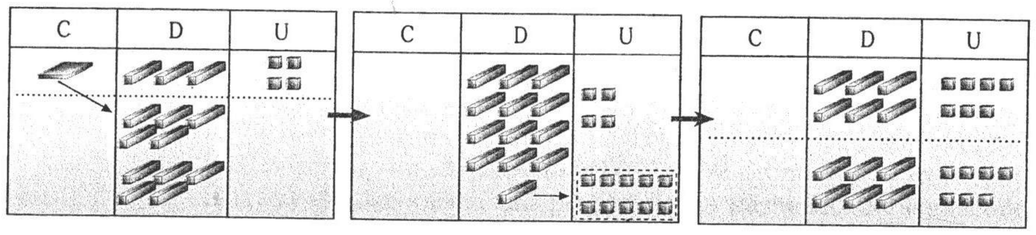
Ao passar para a representação das ações realizadas, estamos propondo que seja registrada inclusive a troca de 1 dezena por 10 unidades. Assim, o processo longo aparece representado por um modo ainda mais longo, mas que explicita todo o raciocínio envolvido.

O zero no quociente

Vejamos agora alguns exemplos em que o zero aparece no quociente. Lembramos mais uma vez que o zero deve ser tratado no algoritmo como qualquer outro número, pois isso evita uma série de dificuldades e erros freqüentes.

Em 134 ÷ 2, teremos:

No ábaco



No algoritmo

C	D	U
1	3	4
0 +	10 +	10 +
1	13	14
	12	14 −
	1	0

2		
0	6	7
C	D	U

O professor pode apresentar aos alunos o seguinte raciocínio: "Tenho 1 centena para repartir igualmente em 3 grupos. Quantas centenas caberá a cada grupo? A resposta é zero centenas. Então, vou marcar zero no lugar das centenas".

Aplicando sempre esse mesmo raciocínio, o aluno provavelmente não terá problemas ao deparar com zero no quociente, seja intercalado, seja na ordem das unidades. Na divisão 856 ÷ 8, por exemplo, teríamos:

C	D	U
8	5	6
8 −	0	50 +
0	5	56
		56 −
		0

8		
1	0	7
C	D	U



E na divisão 723 ÷ 6:

C	D	U
7	2	3
6 −	10 +	0 −
1	12	3
	12 −	
	0	

6		
1	2	0
C	D	U



E a tabuada?

Quando as operações têm divisor maior que 5 começam as dificuldades com a tabuada, que ainda não está consolidada para os alunos. Observa-se nessas ocasiões que alguns alunos ficam tão preocupados em descobrir o resultado de uma multiplicação que deixam de acompanhar a atividade do professor e do resto da classe em busca do quociente da divisão.

O professor então precisa estar seguro quanto ao que pretende trabalhar: se o domínio do aluno sobre os resultados da tabuada ou se fazê-lo compreender o processo da divisão.

Se o objetivo é ajudar o aluno a desenvolver divisão de números naturais, convém evitar atividades paralelas. É preferível que, antes de iniciar o trabalho com a divisão em si, o aluno dedique certo tempo à construção da tabuada em questão, para que possa consultá-la quando necessitar.

Quanto aos casos em que o divisor é um número maior que 10, é muito importante que o processo até aqui utilizado continue o mesmo. Tomemos, por exemplo, a divisão 843 ÷ 17. O aluno inicia o trabalho construindo a tabuada do 17:

	Raciocínio que pode ser utilizado
0 × 17 = 0	
1 × 17 = 17	17 + 17 ou 17 × 2
2 × 17 = 34	17 + 34 ou 17 × 3
3 × 17 = 51	17 + 51 ou 17 × 4 ou 34 × 2
4 × 17 = 68	etc.
5 × 17 = 85	Por raciocínio proporcional,
6 × 17 = 102	4 × 17 é o dobro de 2 × 17.
7 × 17 = 119	
8 × 17 = 136	
9 × 17 = 153	
10 × 17 = 170	

Em seguida, deve fazer os cálculos no algoritmo:

C	D	U	17
8	4	3	0
0	80		C D U
8	84		

Para encontrar o algarismo que irá na ordem das dezenas consultando a tabuada, o aluno verifica que 4 é o resultado adequado (4 × 17 = 68).

C	D	U	17
8	4	3	0 4
0	80	160	C D U
8	84	163	
	68		
	16		

Novamente, a tabuada vai fornecer o quociente procurado (9 × 17 = 153):

C	D	U	17
8	4	3	0 4 9
0	80	160	C D U
8	84	163	
	68	153	
	16	010	

Alguns professores argumentam que é perda de tempo fazer cada tabuada. Esquecem-se, porém, do tempo perdido e do desgaste imposto ao aluno que é obrigado a decorar as diversas regras dos casos de divisão.

Na verdade a construção de tabuadas é importante para o aluno porque permite que ele se defronte com situações novas de multiplicação e aplique seus conhecimentos. Desse modo, poderá revê-los, bem como aprofundá-los e ampliá-los. À medida que vai dominando o processo, ele próprio começa a queimar etapas, e uma delas é justamente a construção da tabuada toda. Começa a perceber que basta fazer alguns cálculos aproximados.

Em um caso como 990 ÷ 43, por exemplo, é possível que o aluno, com suas próprias deduções, reduza bastante a quantidade de registros feitos no algoritmo.



C	D	U	43
9	9	0	0 2
8	6		C D U
1	3		



C	D	U	43
9	9	0	0 2 3
8	6	130	C D U
1	3	130	
		129	
		1	

Processo americano

O outro algoritmo para a divisão é o processo americano ou processo das subtrações sucessivas. Esse processo está ligado à idéia de "repartir igualmente" e reproduz exatamente o que a criança faz para repartir igualmente uma quantidade de objetos. Vejamos o exemplo de repartir igualmente 19 cartas entre 3 jogadores.

O aluno vai distribuindo uma para cada jogador, usando 3 cartas em cada passada. Verifica quantas sobram com ele após cada distribuição, e continua o processo, até perceber que não é mais possível:

A representação no algoritmo fica:

	Cada criança recebe	Total de cartas gastas	Sobram
			19
1ª distribuição	1	3	16
2ª distribuição	1	3	13
3ª distribuição	1	3	10
4ª distribuição	1	3	7
5ª distribuição	1	3	4
6ª distribuição	1	3	1

19	3	
3	1	
16		
3	1	
13		
3	1	+
10		
3	1	
07		
3	1	
04		
3	1	
01	6	cartas por criança

A princípio, todos os alunos fazem a divisão desse modo. Aos poucos, porém, percebem que podem economizar tempo, distribuindo mais de uma carta de cada vez:

19	3		19	3		19	3	
6	2		15	5		12	4	
13			4			7		
6	2	+ ou	3	1	+ ou	6	2	+
7			1	6		1	6	
6	2							
1	6							

É importante que o professor apresente e discuta com a classe as várias soluções encontradas.

O processo americano também pode ser utilizado quando o divisor é um número maior que 10, como, por exemplo, 884 ÷ 24:

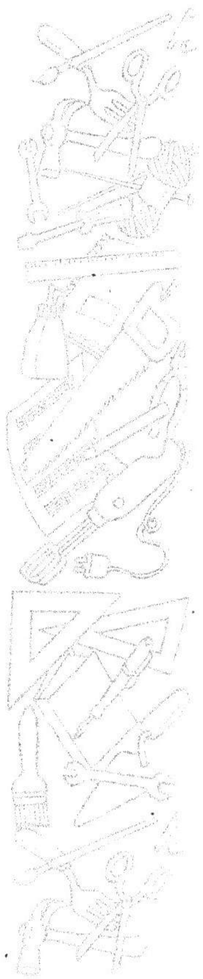
884	24		884	24		884	24	
240	10		480	20		720	30	
644			404			164		
240	10		240	10		120	5	+
404			164		+ ou	044		
240	10	+ ou	96	4		24	1	
164			068			20	36	
120	5		48	2				
044			20	36				
24	1							
20	36							

O que se pode perceber é que esse processo, no seu limite, chega ao processo euclidiano. Aqui, por tentativas, coloca-se qualquer número no quociente (quociente parcial) e, se o resto permitir, faz-se nova "distribuição", ou seja, define-se um novo total no quociente (outro quociente parcial), continuando o processo até que o resto seja menor que o divisor. No fim, somam-se os quocientes parciais.

No processo euclidiano, o que se faz é procurar *o maior número possível* de ser colocado no quociente, já obtendo o resto menor que o divisor.

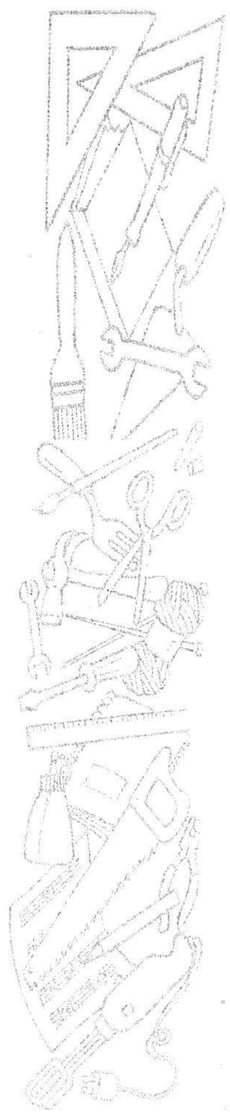
Outra diferença é que, no processo americano, trabalha-se sempre com o "total de unidades", ao passo que no processo euclidiano as unidades são agrupadas em dezenas, centenas, etc.

Para você fazer



1. Resolva os problemas e destaque a idéia da divisão presente em cada um deles.
   a) Uma equipe de 15 operários trabalha numa obra e ganha, por turno, uma quantidade de fichas correspondente à tarefa realizada. No primeiro turno, o mestre da obra distribuiu 165 fichas; no segundo, 345; e, no terceiro, 90 fichas. Ao final do trabalho, os operários haviam obtido quantidades iguais de fichas e foram trocá-las por dinheiro. Como cada ficha vale R$ 4,00, determine quanto cada operário recebeu.
   b) A empresa que explora a travessia Guarujá—Bertioga tem 2 balsas, cada uma com capacidade para transportar 25 automóveis por viagem. As balsas trabalham coordenadas: quando uma sai do Guarujá, a outra deixa Bertioga. Num certo momento, 275 carros fazem fila no Guarujá e 82 carros em Bertioga. Quantas viagens as balsas terão de fazer até acabar com as filas dos carros e retornar para o estaleiro, que fica no Guarujá?
2. Use os números 210 e 15 para desenvolver dois problemas, um com idéia de repartir igualmente e o outro com a idéia de medir.
3. Efetue a divisão 317 ÷ 5 pelo processo longo. Use o material dourado e faça a representação no caderno.
4. Numa prova, um aluno fez a divisão pedida da seguinte maneira:

5	6	8	6
5	4	20	84
0	2	28	
		24	
		4	



E outro aluno fez assim:

$$\begin{array}{r|l} \overset{\frown}{5}68 & 6 \\ \hline 22 & 91 \end{array}$$

a) Que observações você faria com relação ao domínio de cada um no algoritmo da divisão?

b) Que sugestões você daria a eles para corrigir seus erros?

5. Uma questão que impressiona muito os alunos é o fato de todos os algoritmos das operações começarem pelo algarismo das unidades, indo para as de ordens maiores, enquanto o algoritmo da divisão euclidiana faz exatamente o contrário. Você acha que as contas só podem ser feitas nessa ordem, ou é possível mudá-la?

6. Experimente fazer a adição 345 + 173, começando pela ordem das centenas até chegar à ordem das unidades. Use primeiro o ábaco, com o material dourado, fichas ou dinheiro, e depois represente no caderno o que você fez. O que se pode concluir?

7. Agora experimente fazer no ábaco e, depois, representar as seguintes contas, começando pelo lado oposto:

   a) 752 − 236

   b) 35 × 6

   c) 358 ÷ 3



Margarita Philosophica, de Gregor Reisch (1503): gravura que representa a Aritmética ensinando ao abacista (Pitágoras) a fazer cálculos.



Frontispício (1529) de um dos *Rechenbücher* de Adam Riese: gravura representando uma competição entre um abacista e um algorista.



COMPLEMENTAR

1. [E a matemática fora da sala de aula?]

A pesquisadora Terezinha Carraher questiona neste texto a discrepância entre a matemática que se ensina na escola e aquela que o aluno já conhece e utiliza em diferentes momentos de seu dia-a-dia.

Na escola, a matemática é uma ciência ensinada em um momento definido por alguém de maior competência. Na vida, a matemática é parte da atividade de um sujeito que compra, que vende, que mede e encomenda peças de madeira, que constrói paredes, que faz o jogo na esquina. Que diferença fazem essas circunstâncias para a atividade dos sujeitos?

Na aula de matemática, as crianças fazem conta para acertar, para ganhar boas notas, para agradar a professora, para passar de ano. Na vida cotidiana, fazem as mesmas contas para pagar, dar troco, convencer o freguês de que seu preço é razoável. Estarão usando a mesma matemática? O desempenho nas diferentes situações será o mesmo? Que papel exerce a motivação da venda? Que explicação existe para que alguém seja capaz de resolver um problema em uma situação e não em outra? [...]

O que fazer na escola se constatamos que as crianças sabem mais matemática fora da sala de aula? O que ensinar na escola se as crianças já aprendem muito fora da sala de aula? Que postura deve ter o professor, que motivações deve buscar para sua aula, que contratos pedagógicos deve fazer se ficar constatado que as relações interpessoais influenciam até mesmo a utilização de estruturas lógico-matemáticas, que pareciam tão imunes às influências sociais, por fazerem parte das ciências exatas?

Quando uma solução matemática é negociada na rua — numa venda na feira, numa aposta no jogo de bicho — ela reflete os rituais da cultura para a situação, não apenas as estruturas matemáticas subjacentes. Mas como é que os indivíduos aprendem esses rituais, cheios de lógica e matemática, sem os benefícios da instrução sistemática ministrada por um professor especialmente preparado para esse fim? E que explicações teremos para o fracasso da criança em sala de aula se ela for bem-sucedida nas tarefas cotidianas que envolvem estruturas lógico-matemáticas?

(CARRAHER, Terezinha. *Na vida dez, na escola zero.* 5. ed. São Paulo, Cortez, 1991, p. 19-20.)

2. [A construção da regra]

Na escola, a regra construída pelo aluno choca-se com o discurso da escola e do professor. Estes detêm o saber, o resultado esperado.

Ainda hoje procedemos nas salas de aula sob o discurso das leis: a palavra do professor ainda hoje é a melhor palavra: o lugar do professor ainda hoje é o melhor lugar.

Tomemos um exemplo muito simples para ilustrar a superestimação do discurso das leis sobre o discurso das regras na escola. Analisemos, para uma mesma conta, quatro resultados:

a) $\begin{array}{r} 74 \\ +\ 59 \\ \hline 1\,213 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 74 \\ +\ 59 \\ \hline 123 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 74 \\ +\ 59 \\ \hline 115 \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 74 \\ +\ 59 \\ \hline 133 \end{array}$

O último resultado *(d)* é o das matemáticas, o que os professores valorizam, que eles qualificam como certo e que esperam de seus alunos. Os outros resultados correspondem aos que os alunos dão para a mesma conta. Seria possível defender, quem sabe, que o primeiro resultado, 1213, estaria mais próximo do resultado do professor, porque nesse caso o aluno simplesmente fez uma justaposição de duas somas independentes (9 + 4 = 13 e 7 + 5 = 12). Penso que não se trata do resultado mais próximo daquele a que chegou o professor, mas o mais distante dos quatro apresentados, porque indica que o aluno não se deu conta do absurdo do resultado proposto por ele. Não fez uma estimativa para criticar sua resposta. Hoje, isso é muito significativo porque, com os computadores, antes de fazer contas, temos que fazer cálculos para criticar a máquina e nossas ações sobre ela. Ou seja, a estimativa voltou a ser um critério muito importante para as contas.

O que interessa destacar aqui é a regra adotada por aquele aluno; como fez a adjção. No caso *(b)*, pode ser que a regra para fazer a conta tenha sido: 4 + 9 = 13 e 7 + 5 = 12, esquecendo de acrescentar mais 1. A regra da terceira conta teria sido: fazer em primeiro lugar a soma 7 + 5 = 12, baixando o 1 e somando o 2 na segunda conta, 4 + 9 = 15. Daí o total 115. Possivelmente, em nossa perspectiva a conta mais absurda tenha sido essa. Mas, na perspectiva da criança, eu diria que foi a mais inteligente, a mais próxima da conta matemática. É razoável supor que, nesse caso, tenha adotado a mesma regra que utiliza para escrever, ou seja, da esquerda para a direita.

Utilizei esse exemplo simples para lembrar que, operando no discurso da lei, a forma de fazer as três primeiras contas não tem vez, não tem lugar. São transgressões, são erros, geram culpa, têm que ser apagados. Caso se considerasse a construção das regras, que uma criança adota para fazer a conta, estas seriam mais importantes do que os resultados produzidos. No construtivismo, o saber do aluno, suas teorias, as regras que inventa, que utiliza para resolver suas dificuldades, são tão relevantes quanto os conhecimentos ou teorias científicas assumidas pelo professor.

(Macedo, Lino de. *Ensaios construtivistas.* São Paulo, Casa do Psicólogo, 1994, p. 88-90.)

3. [As contas]

Délia Zunino analisa o procedimento de crianças de 1ª série diante da proposta de realizar a conta 35 + 18.

O que foi mais surpreendente ao analisar as estratégias utilizadas pelas crianças para resolver a conta era que quase todas procedem frente a ela de forma radicalmente diferente da que colocaram em ação para desenvolver os problemas.

De fato, só um dos alunos entrevistados tenta buscar o resultado fazendo uso de material concreto e reunindo os conjuntos correspondentes aos dois somandos (35 e 18). Todos os demais atuam como se — pelo fato de aparecer incluído em uma conta — cada somando deixará de ser um número, para converter-se na justaposição de dois números separados. [...]

Miguel Angel, por exemplo, atua da seguinte maneira:

Vamos resolver isto:

$$\begin{array}{r} 35 \\ +\ 18 \\ \hline \end{array}$$

Aqui você tem grãozinhos, palitos de picolé...	(Começa a resolver pela esquerda; coloca 3 dedos e agrega 1, escreve 4, depois desenha 5 riscos, depois 8 riscos separados e depois conta todos e coloca o 13 completo.)
O que você fez?	Somei.
Como sabia que tinha que somar?	Pela cruz.
E como você fez? Conte-me.	3 + 1 são 4 e 5 + 8 são 13.
Vamos ver: se começar pelo lado direito, dará o mesmo resultado? Dará igual 413?	...
Vamos fazer?	(Escreve.)
	$\begin{array}{r} 3 \\ +\ 1 \\ \hline 4 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 5 \\ +\ 8 \\ \hline \end{array}$
	(E diz:) 13; dá igual.
Essa é uma conta ou duas?	... uma conta.
Por que escreveu assim?	...
E se copiamos assim, junto? (Escreve a conta.)	Dá igual (escreve 413 embaixo).

[...] A conta tem então o mágico poder de induzir as crianças a operar de maneira muito diferente da que utilizariam frente a uma situação-problema. Por que não recorrem ao material concreto oferecido a elas para realizar com ele as ações que permitem resolver a situação? Evidentemente, tem-se ensinado o procedimento convencional a elas para resolver somas com somandos de vários algarismos e é este procedimento que as têm levado a pensar que, quando se faz uma conta, cada número de dois algarismos deixa de ser um número e se transforma em dois números independentes. [...]

Hughes relata várias pesquisas realizadas na Grã-Bretanha e nos Estados Unidos — concluídas e desenvolvidas por ele mesmo —, cujos resultados evidenciam que o procedimento escrito e o manejo de materiais concretos constituem para as crianças duas atividades não relacionadas entre si, o que leva o autor a assinalar: "é como se habitassem em dois mundos, cada um dos quais possui suas próprias regras e procedimentos, porém sem conexão entre ambos".

Nesse sentido, H. Guinsburg assinala: "Por que a matemática escrita custa tanto às crianças? Talvez em parte a resposta seja a seguinte: como temos visto, a primitiva aritmética infantil — inventada por elas — dedica-se basicamente a problemas com objetos reais.

As crianças com freqüência fazem as contas com os dedos para realizar uma operação. Os métodos desse tipo permitem trabalhar com facilidade e corretamente. Depois, são ensinados diversos procedimentos escritos para conseguir os mesmos objetivos. Infelizmente, com freqüência, não compreendem a necessidade ou a lógica dos métodos escritos impostos pela escola. Como resultado, surge uma extravagante aritmética escrita, separada por um abismo em relação ao conhecimento informal das crianças.

Como fazer para evitar essa separação entre o conhecimento das crianças e os procedimentos escritos que a escola pretende ensinar-lhes?

O conjunto de dados aqui mostrados coloca em evidência a necessidade de tomar sempre como ponto de partida situações-problema reais ou hipotéticas no lugar de apresentar contas carentes de significado. Frente a essas situações, as crianças poderão colocar em ação diferentes estratégias de resolução, discutir com seus colegas a validade das ditas estratégias, refletir sobre elas para determinar quais são mais adequadas ou mais úteis para cada situação. Parece imprescindível criar um vínculo constante entre a ação e a representação, um vínculo que deve incluir tanto a produção por parte das crianças de maneiras de representar as operações realizadas ou a realizar, como também a interpretação das representações das demais, incluída — é claro — a representação convencional.

Por outro lado, as experiências pedagógicas realizadas por C. Kamii mostram que é possível conseguir progressos consideráveis nas possibilidades das crianças de operar com números relativamente grandes sem ensinar o procedimento convencional para somar ou subtrair quantidades de dois ou mais algarismos. De fato, esses procedimentos estão longe de serem imprescindíveis: quando não dispomos de lápis e papel para fazer uma conta, encontramos outros procedimentos que nos permitem resolver mentalmente. Se necessitamos somar 28 + 35, por exemplo, dificilmente imaginamos "5 + 8, 13, elevo 1, 1 + 2, 3, + 3, 6"; é muito mais provável que comecemos pelas dezenas (20 + 30) e agreguemos ao resultado (5 + 5) + 3. Por que não deixar então que as crianças tentem chegar ao resultado de diversas maneiras? Por que não lhes permitir que escrevam as somas ou subtrações que efetivamente fizeram e que quase nunca coincidem com o procedimento convencional? Elas poderiam descobrir progressivamente quais são as maneiras mais econômicas de realizar as operações, sobretudo se este é um tema de discussão em aula. Além disso, elas aprenderiam muito mais a respeito das operações e suas propriedades, sobre as estratégias que elas mesmas e as outras utilizam frente a diversas situações. Elas poderiam "fazer matemática", em lugar de ver-se reduzidas a aplicar procedimentos que não compreendem.

(ZUNINO, Délia L. de. *A matemática na escola: aqui e agora*. Porto Alegre, Artes Médicas, 1995. p. 56-69.)

Sobre os textos

a) Utilize as informações do texto "E a matemática fora da sala de aula" para analisar a seguinte afirmação: "O ensino de matemática se faz, tradicionalmente, sem referência ao que os alunos já sabem".

b) Com base no texto de Lino de Macedo, analise algumas operações de adição cujos resultados estejam incorretos e tente supor que regra os alunos teriam utilizado para fazer seus cálculos.

c) Apoiando-se nas idéias de Délia Zunino, uma professora de 2ª série apresentou à classe as seguintes situações:

1. Em uma mesa do refeitório cabem 8 alunos e, na outra, 6 alunos. Quantas crianças poderão acomodar-se nessas mesas?

2. Em um ônibus cabem 43 alunos; em outro, 38. Quantas crianças poderão ser transportadas pelos dois ônibus?

Após alguns alunos terem apresentado suas soluções, a professora abriu uma discussão sobre a necessidade ou não de "armar uma conta" para achar o resultado em cada situação. Analise essa estratégia e, se possível, aplique-a em uma classe na escola onde você faz estágio.

PARA SABER MAIS

CARRAHER, T. (org.). *Aprender pensando*. Petrópolis, Vozes, 1990.

CENTURIÓN, M. *Números e operações*. São Paulo, Scipione, 1994.

COORDENADORIA de Estudos e Normas Pedagógicas (Cenp). *Atividades matemáticas: ciclo básico*. São Paulo, Secretaria de Estado da Educação, 1993.

_____. *Atividades matemáticas: ciclo básico*. São Paulo, Secretaria de Estado da Educação, 1993.

_____. *Atividades matemáticas: 3ª série do 1º grau*. 4. ed. São Paulo, Secretaria de Estado da Educação, 1991.

_____. *Atividades matemáticas: 4ª série do 1º grau*. 2. ed. São Paulo, Secretaria de Estado da Educação, 1991.

_____. *Proposta curricular para o ensino de matemática — 1º grau*. 4. ed. São Paulo, Secretaria de Estado da Educação, 1991.

MIALARET, G. *A aprendizagem da matemática*. Coimbra, Almedina, 1975.

MIGUEL, A. e MIORIM, M. A. *O ensino de matemática*. São Paulo, Atual, 1986.

ZUNINO, D. L. de. *A matemática na escola: aqui e agora*. Porto Alegre, Artes Médicas, 1995.



8

NÚMEROS RACIONAIS

Declaro que tenho mais amor e aferro
ao meu avo da soberania,
que me dá o direito de julgar,
do que à outra fraçãozinha,
que me puder caber,
na repartição termilionesimal
da majestade legislativa.

Almeida Garrett

O tema deste capítulo costuma trazer grandes dificuldades aos alunos, até para aqueles das séries finais do 1º grau e mesmo para os do 2º grau. As dificuldades aparecem nas duas formas de representação dos números racionais: a *fracionária* e a *decimal*.

Quando os alunos deparam com questões simples como

$$1-\frac{3}{4};\ 4\times\frac{1}{2};\ 2-1{,}4;\ 25\%\text{ de }600,\text{ etc.},$$

é muito comum estarem munidos, como estratégia de cálculo, apenas de regras decoradas à custa de grande esforço. O motivo dessa deficiência é simples: eles não construíram, realmente, o conceito de número racional.

A fim de evitar o uso excessivo de regras, é fundamental oferecer aos alunos a oportunidade de manipular materiais variados, que permitam a construção dos conceitos através da experimentação, da verificação de hipóteses levantadas diante de situações-problema convenientemente apresentadas. Vamos falar inicialmente dos números racionais em sua representação fracionária para depois abordar a forma decimal.

I. As frações

Tanto nos livros didáticos como nas salas de aula, a introdução aos números racionais geralmente é iniciada com a idéia de fração. Em geral, também, as frações são ensinadas de modo bastante rígido, através de ilustrações nas quais uma grandeza (geralmente de natureza contínua) é repartida em n partes iguais e são coloridas m dessas partes, para representar a fração $^m/_n$.

Note-se que, inicialmente, são sempre explorados casos em que $m < n$ ($m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$), enfatizando-se bastante que "o inteiro foi dividido em n partes iguais e delas foram retiradas m partes". É por isso que muitas crianças ficam perplexas quando lhes pedimos que representem com uma figura a fração $^m/_n$, em que $m > n$. Diante de frações como $^5/_3$ é comum ouvirmos das crianças comentários deste tipo: "Como posso pegar 5 partes, se o inteiro só tem 3 partes?".

Em seguida à conceituação de frações, surgem os algoritmos das operações com frações, todos ensinados a partir de regras, sem grandes referências ao conceito que é realmente fundamental para a justificação desses algoritmos: a *equivalência de frações*. Observe-se, aliás, que esse conceito surge como um tópico isolado; apresentam-se "as classes de equivalência de uma fração" e não se retorna mais ao assunto.

A palavra *equivalente* significa "de mesmo valor". Assim, dizemos que duas frações são equivalentes quando, embora representadas por numerais diferentes, têm o *mesmo valor*. Por exemplo:

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{6},\ \frac{3}{9},\ \frac{4}{12},\ \text{etc.}$$

são equivalentes porque representam a terça parte de um inteiro.

Quais seriam as causas desse trabalho todo calcado em regras? Uma delas pode ser a introdução precoce do conceito, sem que haja condições de compreensão; isso leva o aluno a decorar as regras. Fatalmente, um professor que aprendeu por esse método irá reproduzi-lo com seus alunos.

Segundo Piaget, o conceito de fração é construído pela criança no período operatório-concreto, desde que ela já seja capaz de conservar quantidades — tanto discretas, quanto contínuas.

Conforme já vimos, a conservação vai sendo construída aos poucos. Uma criança pode ser conservadora em relação à quantidade de objetos de uma coleção, mas não em relação ao volume de líquido transvasado, ou à quantidade de massa que sofreu alteração em sua forma.

Não é aconselhável, portanto, iniciar o trabalho com números racionais antes da 3ª ou da 4ª série, sob pena de se obterem resultados tão-somente decorados, sem o menor significado para a criança.

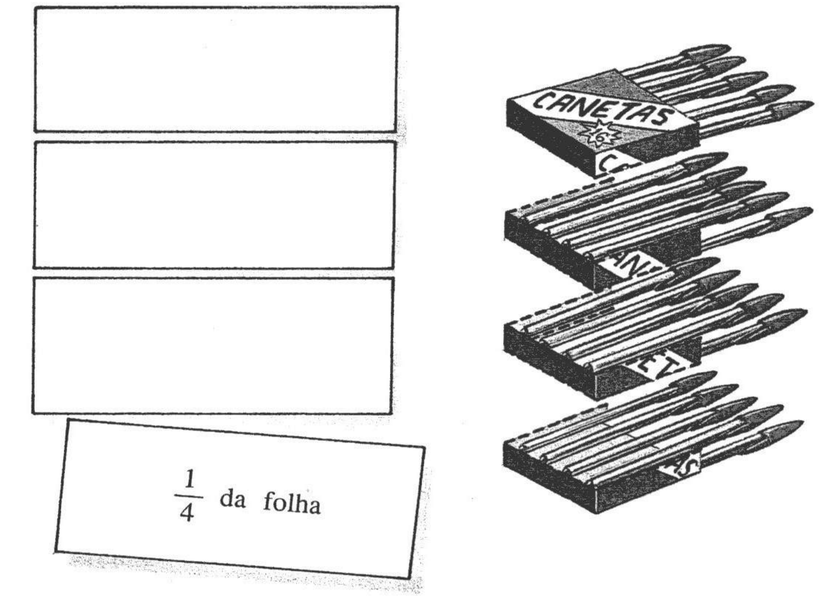
É muito importante, no início do trabalho com números racionais, que a criança *tenha oportunidade de manipular materiais variados*, em vez de ficar apenas colorindo figuras. Desse modo, ela poderá realizar experiências como:

- repartir quantidades (discretas ou contínuas) em porções iguais, buscando seus próprios caminhos;
- verificar se as porções obtidas são realmente iguais, por meio de comparação das quantidades, no caso de grandezas de natureza discreta, ou superposição de partes, no caso de grandezas de natureza contínua;
- conferir se a partição está completa, recompondo a coleção ou figura inicial.

Iniciando o trabalho com frações

Didaticamente, é mais produtivo começar o trabalho com frações pela divisão de grandezas de natureza contínua, uma vez que, para indicar o tamanho de cada porção obtida a partir da divisão, só se usará um número fracionário. No caso das grandezas de natureza discreta, além do número fracionário, que indica o tamanho de cada porção obtida, intervém ainda um número natural quantificando os elementos da coleção que ficam em cada uma dessas porções.

A título de ilustração, consideremos uma folha de sulfite que foi dividida em 4 partes iguais. Sabemos que cada parte corresponde a $1/4$ de toda a folha. Mas se tomarmos como exemplo uma caixa com 20 canetas a ser dividida entre 4 pessoas, cada porção resultante da divisão será representada pela mesma fração $1/4$ (da caixa), só que, nesse caso, poderemos indicar o total de canetas existentes em cada quarta parte da caixa (5).

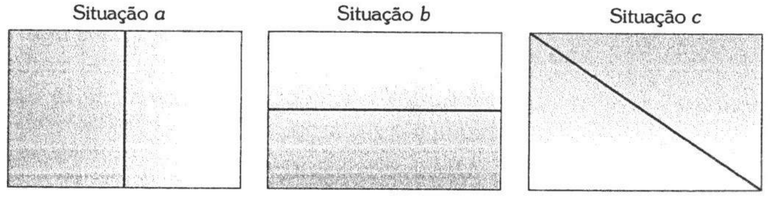


De início, é preferível a utilização de materiais de sucata, como revistas velhas ou formulário contínuo usado, impressos, etc. Ao trabalhar com esse tipo de material, o aluno tem oportunidade de experimentar, de procurar várias soluções sem medo de errar, uma vez que pode usar quantas folhas quiser. O mesmo não ocorreria, por exemplo, se ele estivesse colorindo figuras no caderno ou em papel mimeografado.

Para introduzir a noção de fração, o professor poderá propor à classe algumas atividades como as que seguem.

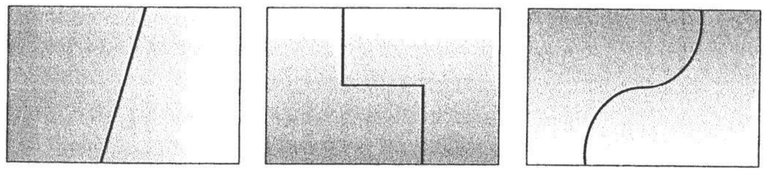
1. Reparta uma folha retangular em 2 partes iguais, de todos os modos que você conseguir.

Inicialmente, surgem apenas as soluções tradicionais:



Nas situações *a* e *b*, verifica-se facilmente que as partes obtidas são iguais, pois a dobra foi feita sobre os eixos de simetria da figura. Já no caso *c* surgem dúvidas, uma vez que, ao dobrar a folha, os vértices dos triângulos não coincidem, justamente porque não se está mais usando um eixo de simetria. O aluno deverá cortar as duas partes e girar uma delas, para sobrepor à outra.

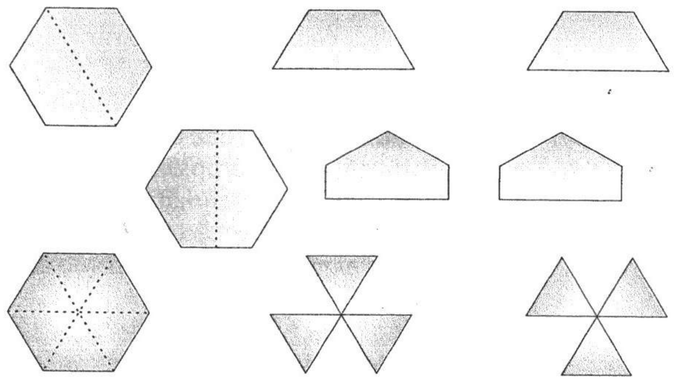
Quando insistimos para que os alunos procurem outras saídas, começam a aparecer as mais variadas e criativas soluções:



Sempre que surgir uma nova solução, os alunos deverão checar se ela está correta. Isso é feito mediante duas ações:

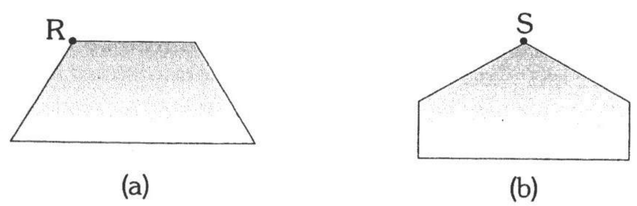
- conferindo por superposição se as partes obtidas são iguais;
- verificando se, com as partes obtidas, é possível reconstruir a figura inicial.

2. A partir de um molde em cartolina, faça um hexágono em papel de sucata. Separe-o em 2 novas figuras, iguais entre si. Algumas das soluções possíveis são:



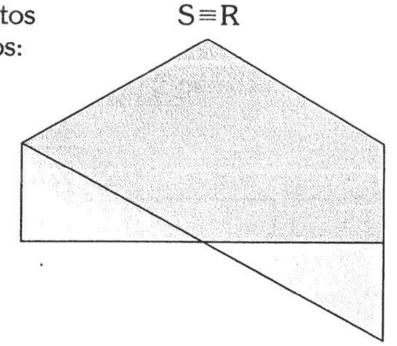
Ao comparar as diversas soluções encontradas pela classe, os alunos irão descobrir que as várias figuras formadas são *equivalentes*, isto é, têm a mesma área, embora com outra forma. Esse trabalho irá facilitar, mais tarde, o estudo de figuras planas e o cálculo de área.

Vamos comparar, por sobreposição, duas das soluções:



(a) (b)

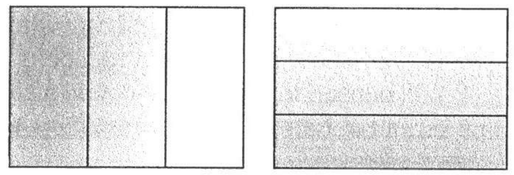
Fazendo coincidir os pontos indicados por R e S, teremos:



Pode-se verificar que o triângulo que sobrou na figura *b* encaixa-se no triângulo que falta na figura *a*.

3. Reparta uma folha retangular em 3 (ou 5, ou 6, ou 7...) partes iguais.

Essa atividade em geral causa dificuldade para as crianças, que tendem a usar sempre os eixos de simetria das figuras obtidas, repartindo-as em 2, 4, 8, ... partes iguais. Assim, as soluções vão surgindo, na sala de aula, por tentativas:



Dois enfoques na representação de frações

Depois de algumas atividades introdutórias de dividir materiais variados em partes iguais, o aluno já estará pronto para representar cada parte obtida associando o símbolo $^{m}/_{n}$ ao quociente de *m* por *n* ($n \neq 0$), tanto com $m < n$, como com $m > n$:

$$m \div n = \frac{m}{n}$$

$$n \neq 0$$

Vejamos, a seguir, algumas dessas situações.

- Reparta igualmente 1 folha de papel entre 3 pessoas e indique a porção que coube a cada uma.

A
B
C

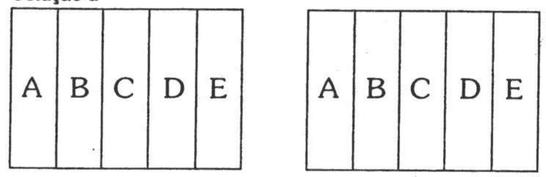
O número que irá representar a porção que coube a cada pessoa deve indicar o resultado da divisão de 1 folha por 3 pessoas, ou $1 \div 3$. Como esse resultado não pode ser indicado por um número natural, utiliza-se um *número fracionário* para representá-lo:

$1 \div 3 = \frac{1}{3}$ (lê-se "um terço")

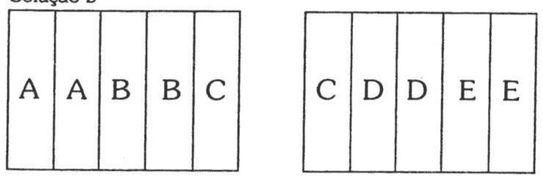
Reparta igualmente 2 folhas de papel entre 5 pessoas.

Geralmente surgem duas soluções:

Solução *a*



Solução *b*



Na solução *a*, cada folha foi dividida em 5 partes iguais, cabendo a cada pessoa o resultado de $1 \div 5$ ou $1/5$. Como são 2 folhas, cada pessoa receberá $1/5 + 1/5$, ou $2 \times 1/5$. Pode-se pensar, também, que coube a cada pessoa o resultado da divisão de 2 folhas por 5 pessoas, ou seja:

$$2 \div 5 = \frac{2}{5} \quad \text{(lê-se "dois quintos")}$$

Desde o início do estudo de números fracionários, convém incentivar a classe a representá-los por meio de diversas frações equivalentes, utilizando inclusive escritas aditivas e multiplicativas. No exemplo dado, deve-se enfatizar que:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \text{ equivale a } 2 \times \frac{1}{5}, \text{ que equivale a } \frac{2}{5}.$$

Peça aos alunos que comparem, por sobreposição das partes, as soluções encontradas pelos diversos grupos.

Na solução *b*, temos o modo tradicional de representar frações. Cada folha representa 1 inteiro, que foi dividido em 5 partes iguais, cabendo 2 delas a cada pessoa. Essa quantidade é representada pela fração $2/5$.

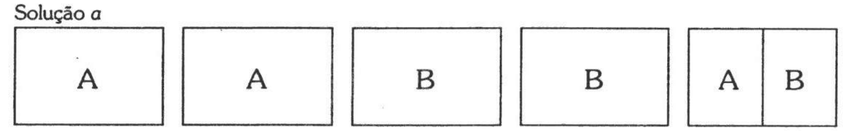
Depois da atividade, é importante o professor enfatizar que cada pessoa receberá uma porção, que é o resultado de $2 \div 5$. Sabemos que esse resultado não pode ser representado por um número natural e que, por isso, ele é representado pelo número fracionário $2/5$.

Vejamos, agora, uma situação em que o numerador é maior que o denominador.

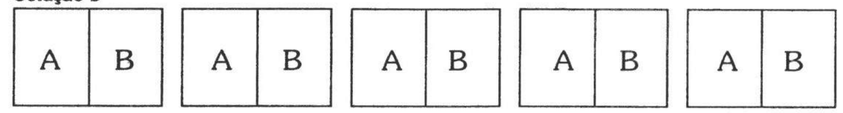
Reparta igualmente 5 folhas entre 2 pessoas.

Podem surgir soluções como:

Solução *a*



Solução *b*



Na solução *a*, cada pessoa receberá 2 folhas e mais uma porção, o que se obtém repartindo 1 folha em 2 partes iguais, ou seja, $1/2$. Caberá, então, a cada uma, a porção $2 + 1/2$, também indicada por $2\ 1/2$, Lembrando que esse resultado surgiu da divisão de 5 por 2, pode-se ainda representá-lo por $5/2$.

Deve-se enfatizar que as escritas são todas equivalentes:

$$2 + \frac{1}{2} \text{ equivale a } 2\frac{1}{2}, \text{ que equivale a } \frac{5}{2}.$$

A solução *b* consiste em dividir cada folha em 2 partes iguais ($1 \div 2 = 1/2$), cabendo a cada pessoa 5 dessas partes. Cada pessoa receberá $5 \times 1/2$, ou seja, $5/2$ (que é o resultado de $5 \div 2$). As escritas são todas equivalentes:

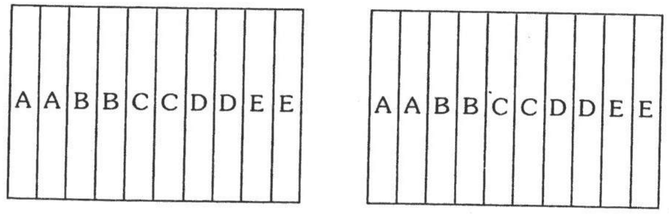
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ equivale a } 5 \times \frac{1}{2},$$

que equivale a $\frac{5}{2}$, que equivale a $2 + \frac{1}{2}$, que equivale a $2\frac{1}{2}$.

Agora, o professor deverá novamente explicar que cada pessoa receberá uma porção correspondente ao resultado de $5 \div 2$. Como esse resultado não pode ser representado por um número natural, ele é representado pelo número fracionário $5/2$.

Quando um aluno apresenta uma solução diferente, a classe verifica se está correta fazendo superposição com as demais. Por exemplo, no problema em que se pede para repartir igual-

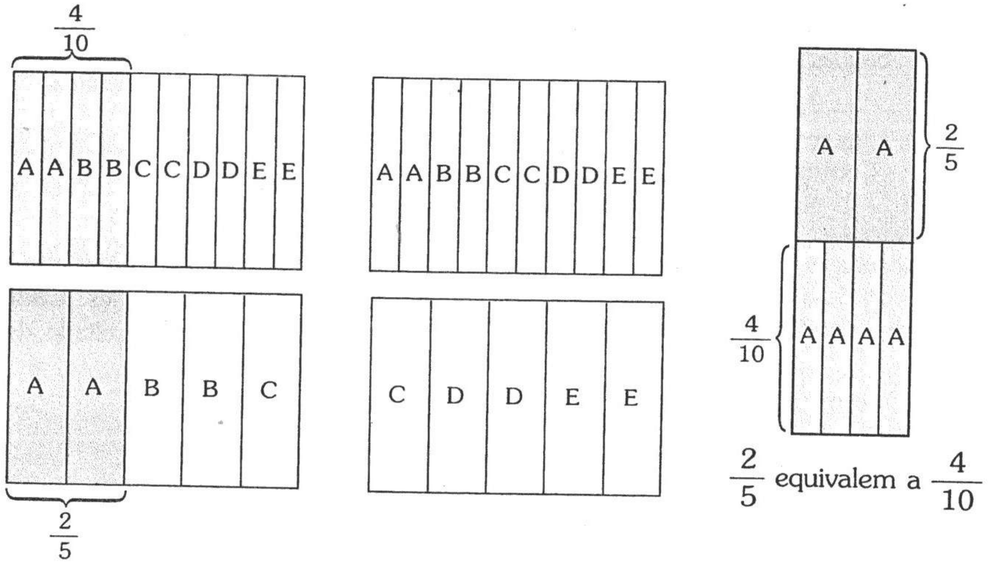
mente 2 folhas de papel entre 5 pessoas, é possível que alguma criança divida cada folha em 10 porções iguais (sendo cada uma representada por $1 \div 10 = {}^{1}/_{10}$), cabendo a cada pessoa 2 porções de ${}^{1}/_{10}$ de cada folha.



Assim, cada pessoa receberá:

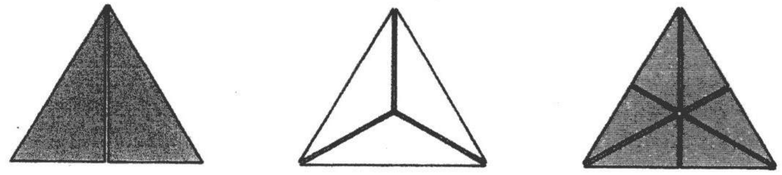
$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\text{, ou } 4\times\frac{1}{10}\text{ ou }\frac{4}{10}\text{ ou } 2\times\frac{2}{10}$$

Por sobreposição das partes obtidas, os alunos verificam a equivalência das soluções:



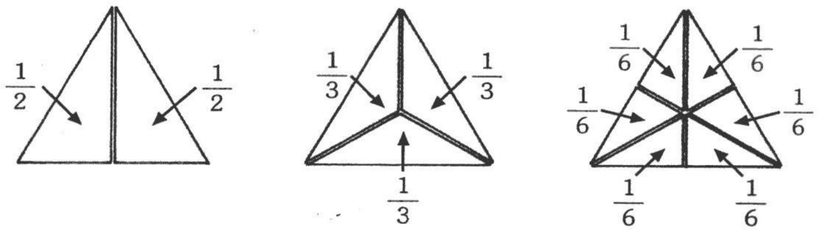
Atividades com composição e decomposição de figuras

Nessa fase, devem ser apresentadas aos alunos situações diversificadas, em que eles trabalhem com a composição e decomposição de figuras e as várias representações possíveis para um mesmo número racional. Uma possibilidade é oferecer a cada grupo de crianças um jogo constituído de vários triângulos equiláteros do mesmo tamanho, confeccionados em papel-cartão, cada um deles recortado de maneira diferente, mas em partes iguais. Para cada modo de repartir o triângulo, usa-se uma cor diferente.



Com esse material, o professor pode fazer uma série de propostas:

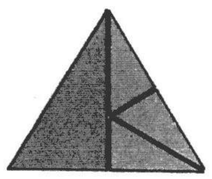
1. Pegue peças de cores iguais, remonte o triângulo eqüilátero e, por meio de uma fração, identifique cada uma das peças como parte do triângulo.



2. Agora, pegue peças de cores diferentes, monte um triângulo equilátero e represente essa construção com uma escrita aditiva.

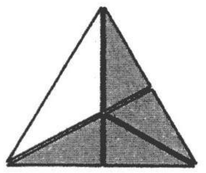
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$$

ou $\frac{1}{2}+\frac{3}{6}=1$



$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$$

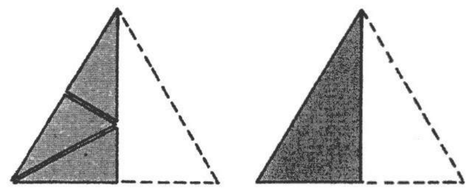
ou $\frac{1}{3}+\frac{4}{6}=1$



3. Utilizando as peças menores, monte um triângulo equivalente à metade do triângulo equilátero.

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$$

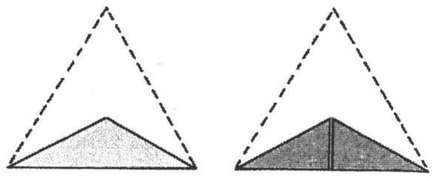
ou $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$



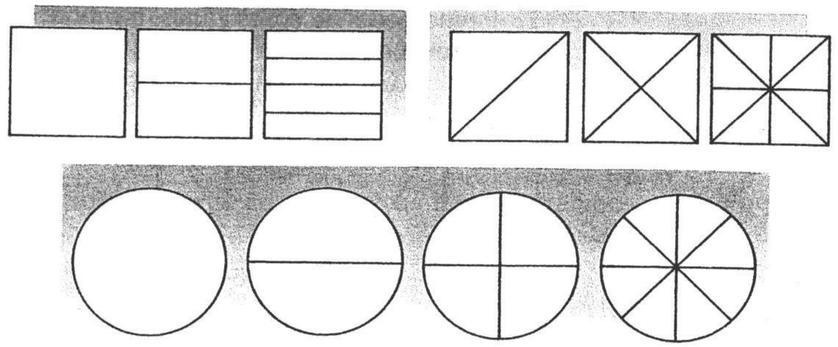
4. Ainda com as peças menores, monte agora um triângulo equivalente a um terço do triângulo equilátero.

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

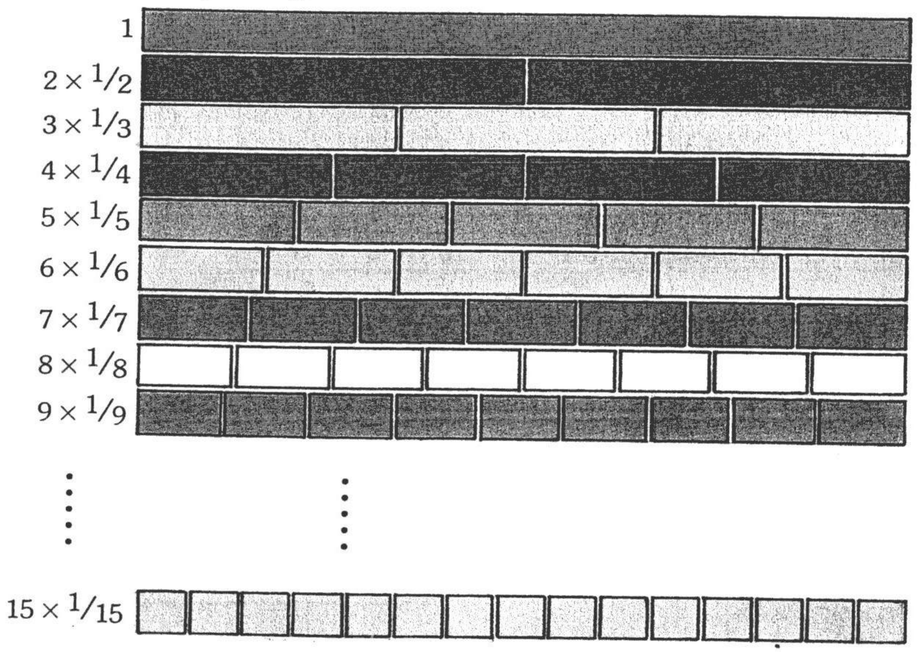
ou $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$



5. O mesmo tipo de atividade pode ser realizado com outras figuras regulares, como o quadrado ou o círculo:



Outro material que pode ser utilizado são tiras feitas de papel-cartão, de mesmo comprimento (por exemplo, 20 cm) mas de cores diferentes. Para cada cor, separa-se a tira em 2, 3, 4, etc. partes iguais.



Todo esse material é muito prático, tanto para a verificação das equivalências como para a comparação entre frações (ordenação) e a compreensão de operações com números fracionários.

Comparação de frações de mesmo numerador ou denominador

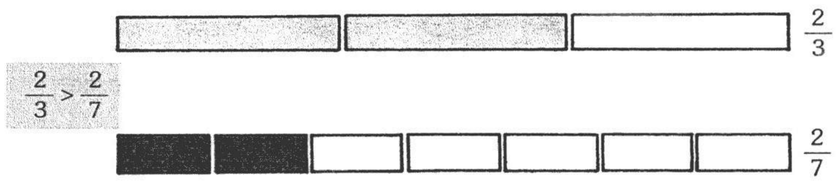
O trabalho de comparação de números fracionários deve ser realizado com apoio de materiais concretos, pois os alunos, presos ainda aos critérios relativos aos números naturais, tendem a considerar maior a fração que apresenta um dos termos (ou ambos) maior que o correspondente na outra fração. Acreditam, por exemplo, que $4/9$ é maior que $1/2$.

Um detalhe muito importante é que, na comparação, todas as frações devem se referir a partes de um *mesmo* inteiro.

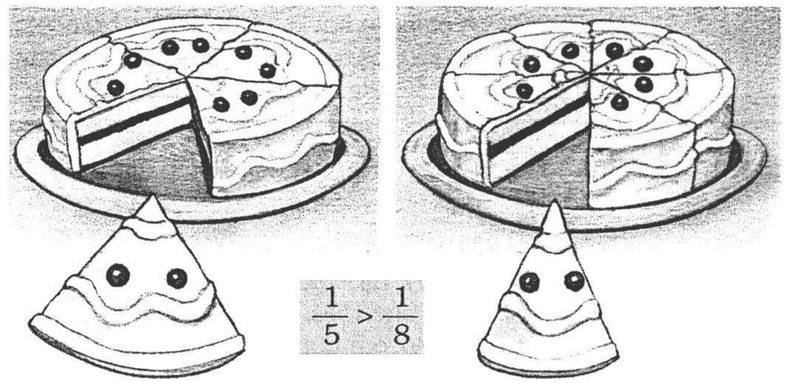
A resolução de situações-problema com o auxílio da sua representação por meio de desenhos ou de um dos materiais já descritos, facilita a compreensão. Vejamos alguns exemplos:

1. Em dois canteiros de tamanhos iguais foram plantados alguns pés de alface. Em um deles, foram ocupados $2/3$ do terreno e, no outro, $2/7$. Qual dos dois tem a maior superfície plantada com alfaces?

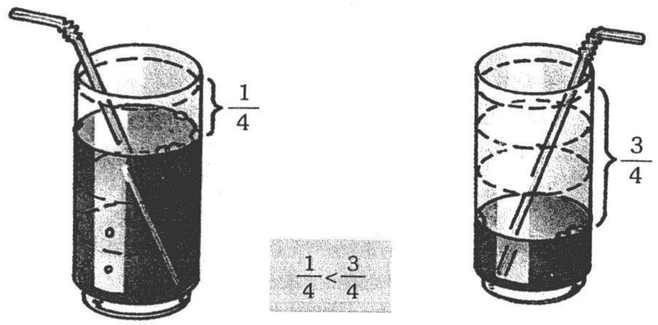
Aqui, os alunos podem usar as tiras de cartolina e fazer a comparação direta:



2. Dona Carmem fez um bolo e o repartiu igualmente entre seus 5 filhos. No dia seguinte, fez outro bolo igual, mas havia na casa mais três crianças e Dona Carmem repartiu o novo bolo, igualmente, entre as 8 crianças. Em qual dos dois dias cada filho de Dona Carmem comeu mais bolo? Represente os dois bolos com as divisões feitas.



3. Carlos e Maria ganharam um copo grande de refrigerante cada um. Carlos tomou $1/4$ de seu copo e Maria, $3/4$. Quem tomou mais refrigerante?

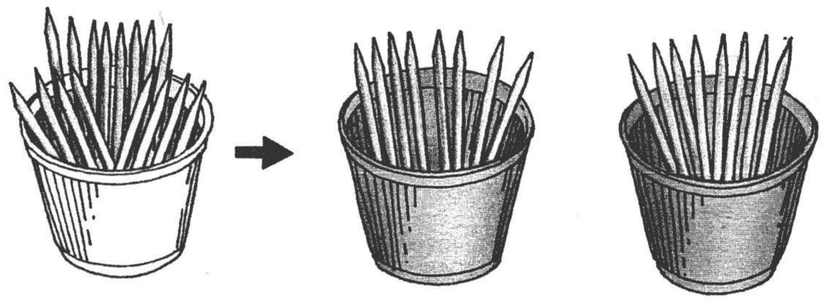


Trabalhando com grandezas discretas

O trabalho com grandezas de natureza discreta acarreta algumas dificuldades, porque, além dos números racionais, envolve números naturais, que indicam a quantidade de elementos da subcoleção. Por isso, o ensino deve usar o apoio de material de manipulação, acompanhado da representação simbólica. Copinhos plásticos pintados com cores diferentes, palitos, fichas e grãos de cereais compõem um bom material de apoio.

Vejamos, por exemplo, alguns problemas:

1. Reparta igualmente os 16 palitos que estão em um copinho branco entre 2 copinhos de cor verde.



A coleção inicial (do copinho branco) representa o "inteiro" e contém os 16 palitos. Os palitos de cada copinho verde representam $1/2$ da coleção inicial e totalizam 8.

2. Reparta igualmente os palitos do copinho branco em 4 copinhos azuis.

Depois que os alunos representaram cada copo azul como sendo $1/4$ da coleção do copo branco, podem ser levantadas algumas questões. Peça à classe que sempre represente as suas respostas com números fracionários:

a) Quantos copos verdes formam a coleção inicial? E quantos azuis?

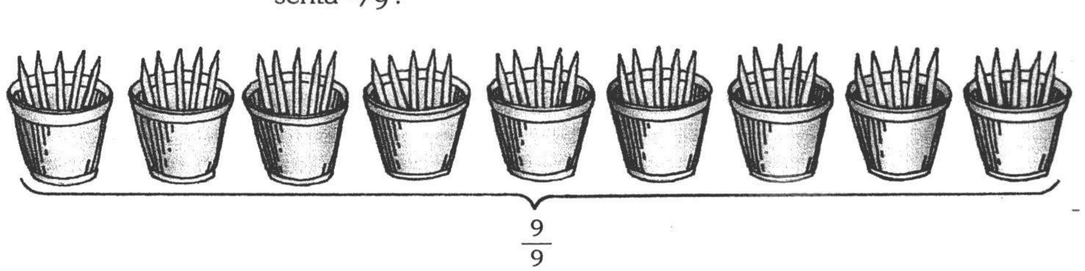
b) Que parte da coleção é maior: $1/2$ ou $1/4$; $1/2$ ou $2/4$; $1/2$ ou $3/4$?

c) Quantos palitos estão em $3/4$ da coleção? E em $1/2$?

Esse trabalho reduz as dificuldades para resolver problemas tradicionais do tipo: "Dada uma coleção de x elementos, quantas unidades estão em m/n dessa coleção?".

3. Uma coleção de lápis tem 45 elementos. Quantas lápis há em $1/9$ da coleção?

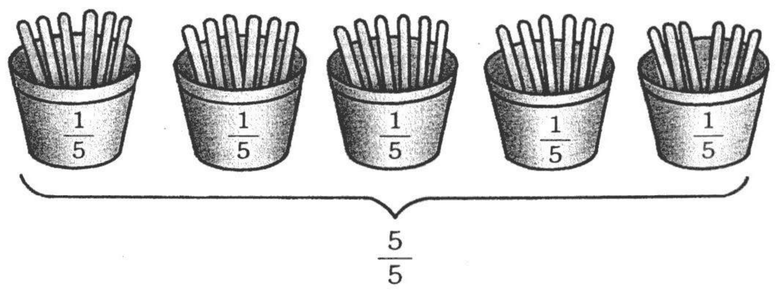
Vamos usar novamente palitos e copinhos para representar a situação. Se estamos falando em $1/9$ da coleção (1 copinho), podemos dizer que a coleção toda é formada por $9/9$ (nove copinhos). Assim, os alunos repartem os 45 palitos igualmente por 9 copinhos. Em cada um, haverá 5 $(45 \div 9)$, o que representa $1/9$.



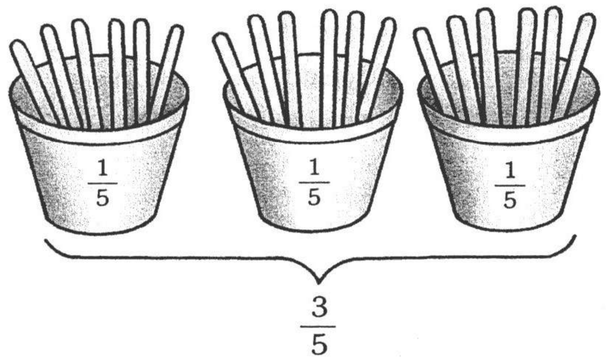
Portanto, em $\frac{1}{9}$ da coleção há 5 lápis.

4. Uma caixa tem 30 laranjas. Quantas laranjas há em $3/5$ da caixa?

Para representar o problema usamos 30 palitos. Se estamos procurando $3/5$ da coleção, podemos dizer que a coleção toda é representada pela fração $5/5$. Então, separando-a em 5 copinhos, cada um corresponderá a $1/5$ da coleção.



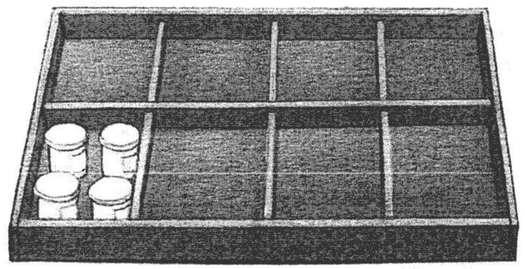
Em cada copinho estão 6 palitos ($30 \div 5$). Os $3/5$ procurados correspondem ao total dos palitos de 3 desses copinhos: $3 \times 6 = 18$.



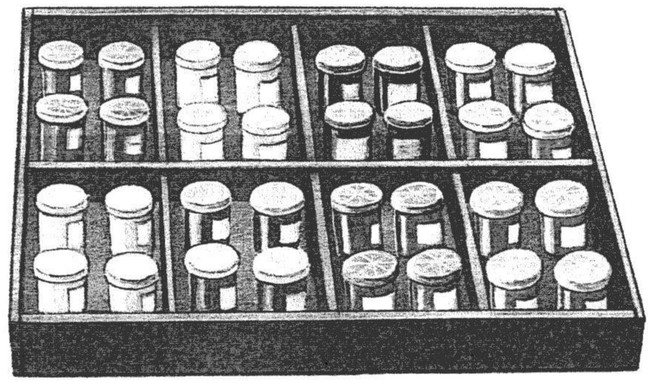
O problema inverso é: "Sabendo-se que m/n de uma certa coleção corresponde a uma dada quantidade de unidades, quantas unidades tem a coleção toda?".

5. Uma caixa está cheia de potes de guache. Em cada $1/8$ dela há 4 potes. Quantos potes há na caixa toda? (No lugar de copinhos e palitos, os alunos poderão fazer figuras.)

Se estamos falando em $1/8$ da caixa, isso significa que a caixa toda será representada por $1/8$, ou seja, 8 repartições:

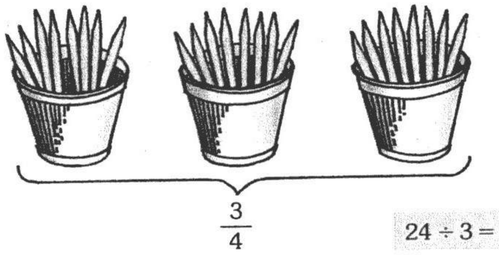


Como em cada repartição há 4 potes de guache, a caixa toda terá, então, 32 potes ($8 \times 4 = 32$).



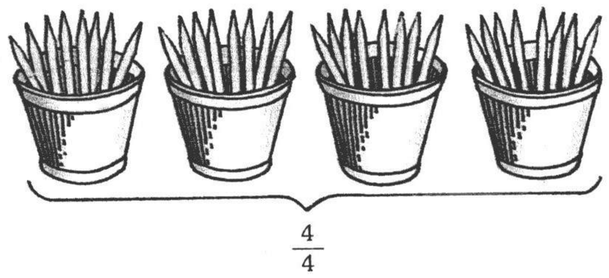
6. Em uma classe, $3/4$ dos alunos correspondem a 24 crianças. Quantas crianças, ao todo, tem a classe?

Para representar os $3/4$ da classe, podemos usar 3 copinhos, cada um significando $1/4$ da coleção. Em seguida, repartimos igualmente os 24 palitos por esses 3 copinhos: $24 \div 3 = 8$.



$24 \div 3 = 8$

A classe toda é representada pela fração $4/4$, ou seja, por 4 copinhos. Teremos, então, 32 alunos na classe ($4 \times 8 = 32$ ou $24 + 8 = 32$).

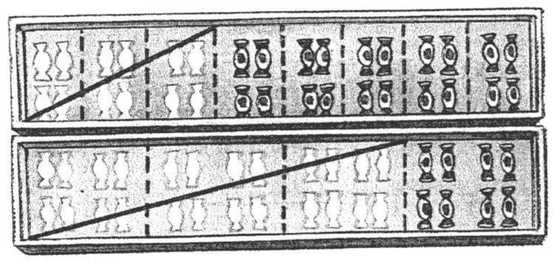


Com essas representações, evita-se que as crianças decorem regras que mandam dividir o total pelo numerador da fração e multiplicar o resultado pelo denominador, ou vice-versa, sem que compreendam o motivo da operação.

Comparação de frações em grandezas discretas

Utilizando representações ou o material de manipulação, é possível realizar a comparação de modo claro e compreensível. Vejamos alguns exemplos:

1. Laura e Pedro têm caixas iguais com 32 balas cada uma. Laura comeu $3/8$ de suas balas; Pedro comeu $3/4$ das balas dele. Quem comeu mais? Quantas balas cada um comeu?

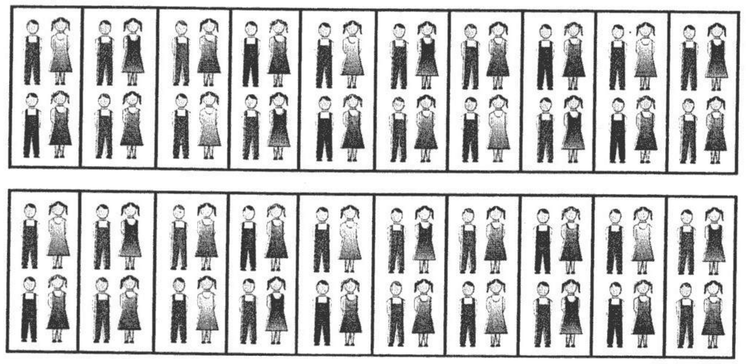


$\frac{3}{8} = 12$ balas (3×4)

$\frac{3}{8} < \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} = 24$ balas (3×8)

2. Uma escola está organizando uma festa junina. O professor determinou que $3/10$ de uma classe com 40 alunos vão trabalhar na barraca de pescaria e $7/10$, no correio elegante. Haverá mais alunos trabalhando na barraca de pescaria ou no correio elegante?



$\frac{3}{10}$ são 12 alunos (3×4)

$\frac{7}{10}$ são 28 alunos (7×4)

$\frac{3}{10} < \frac{7}{10}$

Operações com números fracionários

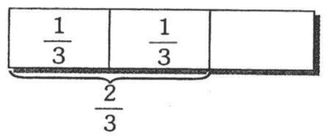
Logo no início da aprendizagem de operações com números fracionários, o professor deve propor atividades em que se utilize material concreto (por exemplo, as tiras coloridas de papel-cartão) para a construção de cada algoritmo, evitando o uso de regras.

Nessa fase, são tratados os casos mais simples das operações com frações, quer o assunto seja introduzido na 3ª série, quer na 4ª.

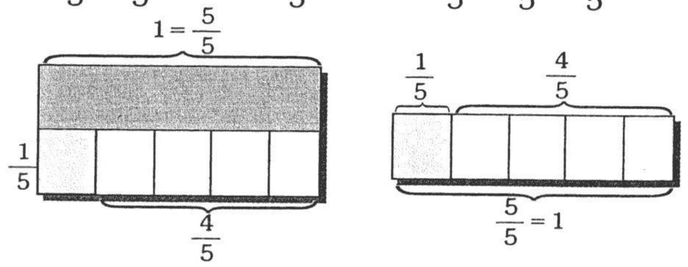
Adição e subtração

Para adição e subtração com frações são mais adequados os casos em que os *denominadores são iguais*, ou em que as *equivalências são visíveis diretamente*. Vejamos os exemplos a seguir:

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

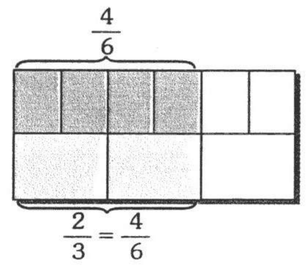


b) $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. Se $1 = \frac{5}{5}$, então $\frac{5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

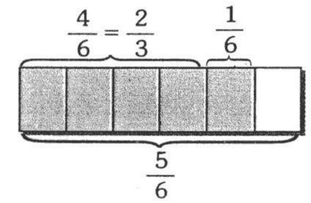


c) $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Comparando a tira de "terços" com a tira de "sextos", verifica-se, por justaposição das partes, que $2/3 = 4/6$.

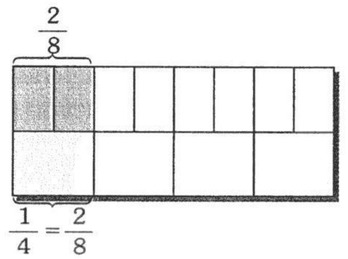


Então, $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

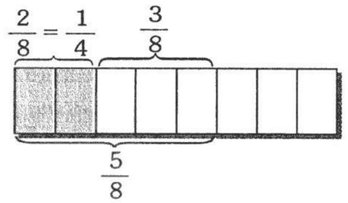


d) $\frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

A comparação entre as tiras mostra que $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$.



Então, $\frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$.



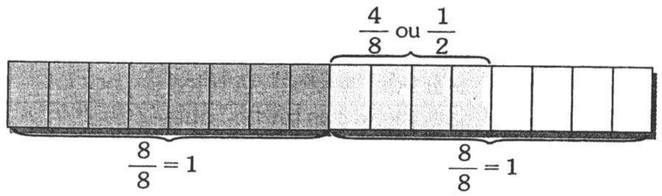
A partir das diversas experiências, os alunos vão descobrindo a regra para somar e subtrair frações: "somam-se (ou subtraem-se) frações de denominadores iguais, conservando-se o denominador e somando-se (ou subtraindo-se) os numeradores".

Multiplicação

Esse trabalho pode ser iniciado com casos de *multiplicação de um número natural por um número fracionário*, empregando o conceito de multiplicação conhecido pelos alunos.

a) $3 \times \frac{1}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$

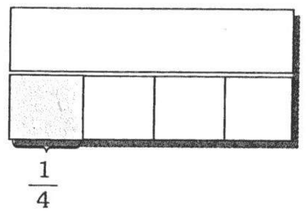
b) $\frac{3}{8} \times 4 = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8}$ ou $\frac{12}{8}$ ou $1\frac{4}{8}$ ou $1\frac{1}{2}$



Divisão

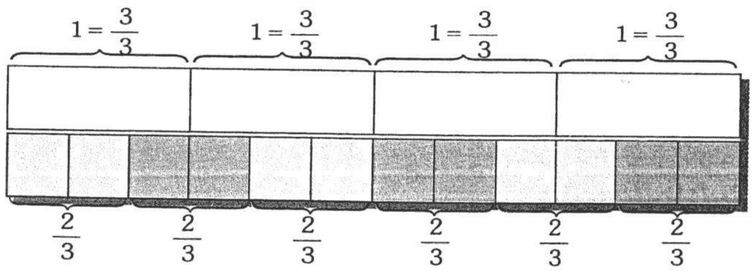
Nessa etapa, convém trabalhar apenas a divisão de *número natural* por *número fracionário* (de preferência com numerador igual a 1) e a divisão de *número fracionário* por *número natural*.

- *Divisão de número natural por número fracionário*. Aqui, estaremos explorando a idéia de medir, ou seja, "quantas vezes o número fracionário indicado cabe no número natural". Por exemplo: quantos pedaços obteremos ao repartir um chocolate em pedaços de $1/4$?



$1 \div \frac{1}{4} = 4$ pedaços

No caso do numerador diferente de 1, é preciso cuidado na escolha dos números, para não tornar a resposta muito complicada. Por exemplo: Tenho 4 chocolates e quero dividi-los em pedaços de $2/3$ de chocolate. Quantos pedaços obterei?

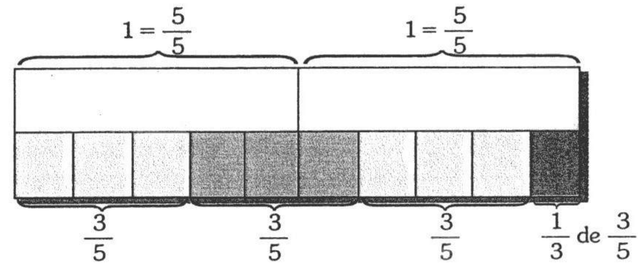


$4 \div \frac{2}{3} = 6$ pedaços

Nesse caso, o resultado é fácil de ser representado.

Já em um caso como $2 \div 3/5$, a resposta é bem mais complicada, o que torna esse tipo de divisão desaconselhável nessa fase de aprendizado.

Por exemplo: Quero repartir 2 chocolates entre algumas pessoas, dando a cada uma delas um pedaço do tamanho de $3/5$ de um chocolate. Quantas pessoas receberão chocolate? Sobra alguma porção de chocolate? Qual?



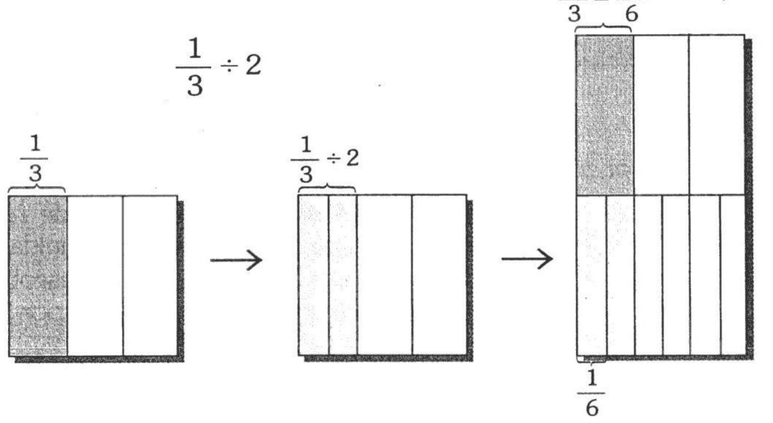
Então, $2 \div 3/5 = 3\ 1/3$, ou seja, obteremos 3 pedaços de chocolate do tamanho desejado ($3/5$ de um chocolate) e sobra um pedaço, que corresponde a $1/3$ da parte que cada um recebeu.

- *Divisão de número fracionário por número natural*. Aqui, estaremos usando a idéia de repartir igualmente.

Por exemplo: Se repartirmos igualmente $1/3$ de um bolo entre 2 pessoas, que parte do bolo cada uma receberá?

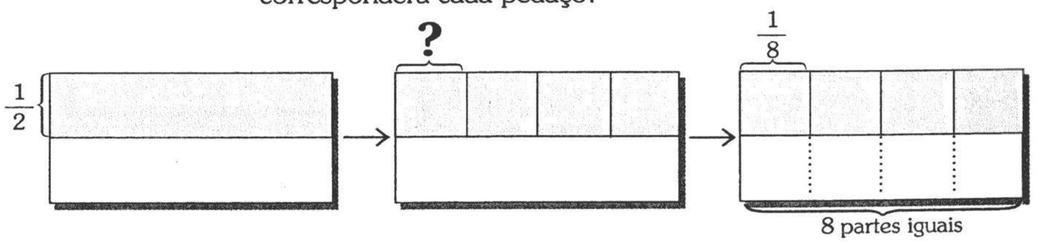
$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

$\frac{1}{3} \div 2$



Comparando a "tira de terços" com outra que seja adequada pela equivalência, encontraremos a "tira de sextos", ou seja, cada pedaço vale $1/6$ do bolo. Assim: $1/3 \div 2 = 1/6$.

Se repartirmos, por exemplo, a metade de uma folha de papel sulfite em 4 pedaços iguais, a que parte da folha corresponderá cada pedaço?



Ao dividir cada metade em 4 partes iguais, teremos 8 partes iguais ao todo. Então, cada porção corresponde a $1/8$ da folha.

Logo, $\frac{1}{2} \div 4 = \frac{1}{8}$.

Avançando nas operações com frações

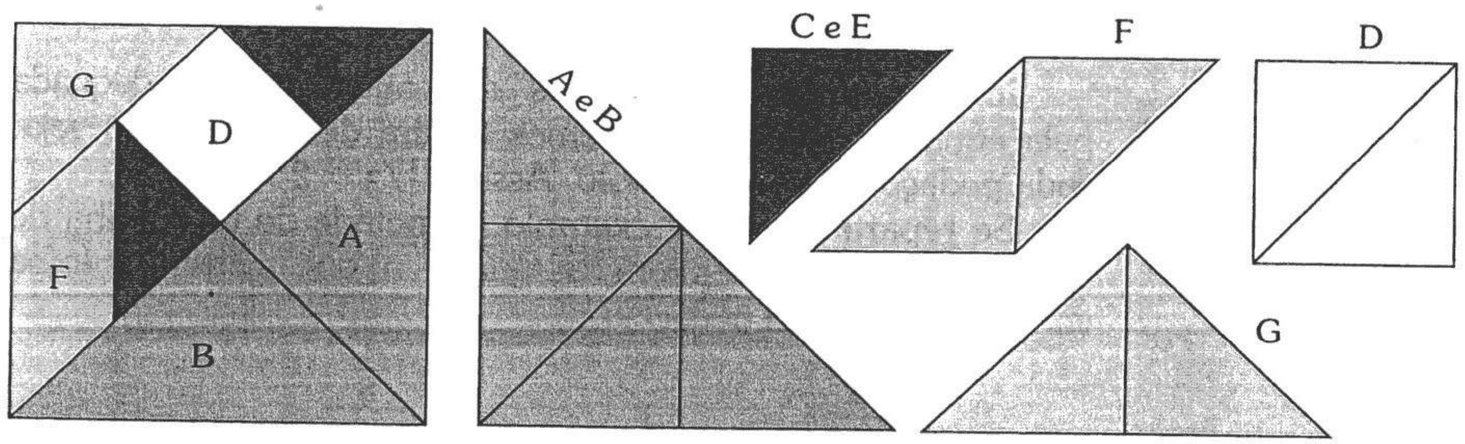
É muito útil, nessa etapa, explorar o conceito de *unidade de medida*. Para isso podem ser apresentadas diversas atividades em que os alunos escolhem uma parte ($1/n$) de determinada figura, que servirá como *unidade de referência* para medir cada porção da figura.

Esse tipo de trabalho é fundamental para que os alunos construam os algoritmos da adição e da subtração com frações de denominadores diferentes.

PRIMEIRA ATIVIDADE

Forneça aos alunos dois tangrans de mesmo tamanho. Peça que pintem cada parte com uma cor diferente e depois recortem só um dos tangrans, deixando o outro inteiro. A tarefa seguinte consiste em indicar a que fração do quadrado inteiro corresponde cada uma das partes.

Os alunos reconhecem facilmente que as peças A e B têm a mesma medida, e que cada uma representa $1/4$ da figura. Quanto às demais partes, há vários modos de raciocinar. Um deles é procurar uma peça que sirva como unidade de referência para medir as outras. Quando os alunos descobrem que as peças C e E têm a mesma medida e podem compor todas as outras partes, a questão está resolvida.



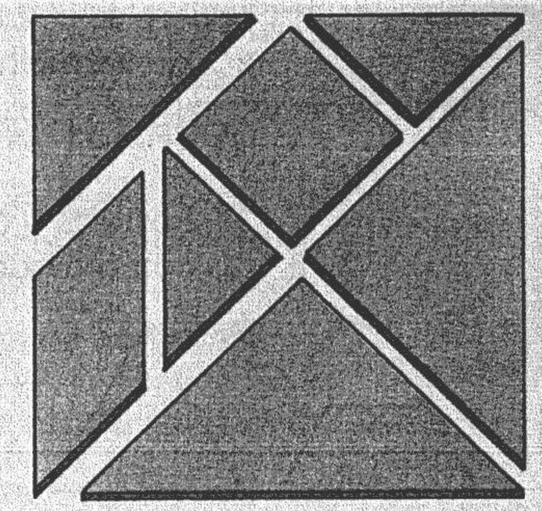
As peças C e E representam, cada uma, $1/16$ do quadrado; as peças D, F e G têm a mesma medida, representando, cada uma, $2/16$ (ou $1/8$) do quadrado.

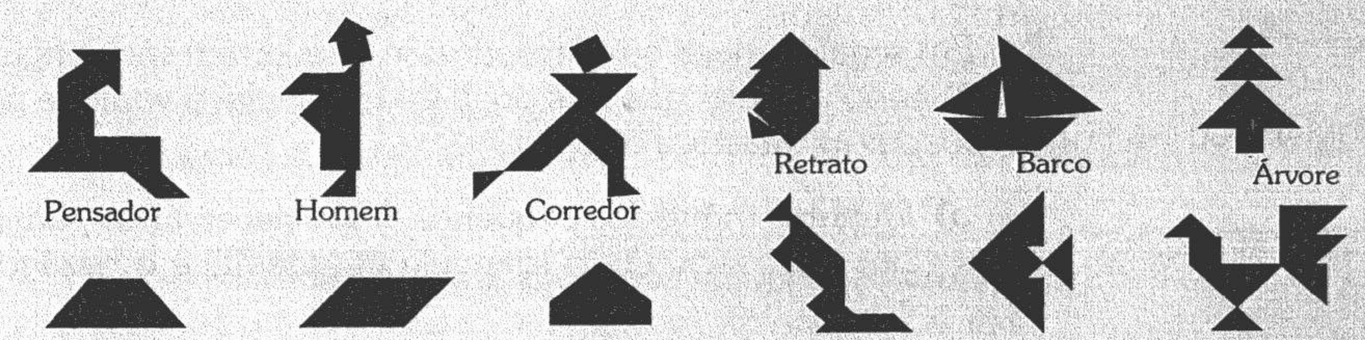
TANGRAM

Milenar jogo de quebra-cabeça chinês cujo nome original, Tch'i Tch'iao Pan, significa "as sete tábuas da argúcia". O Tangram é formado por 7 peças com formas geométricas, resultantes da decomposição de um quadrado. São 2 triângulos grandes, 2 triângulos pequenos, 1 triângulo médio, 1 quadrado, 1 paralelogramo.

A filosofia do Tangram é de que um todo é divisível em partes, as quais podem ser reorganizadas num outro todo. A idéia do jogo é que se reproduzam figuras apresentadas em silhueta, utilizando-se todas as 7 peças sem que haja sobreposição de nenhuma delas.

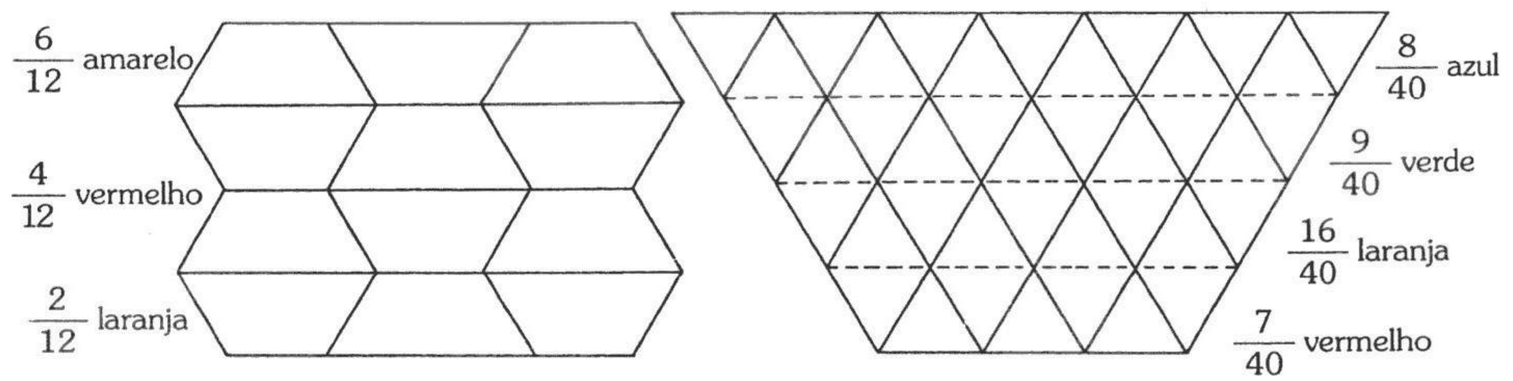
Há silhuetas desde as mais simples até aquelas muito difíceis de se obter.





SEGUNDA ATIVIDADE

Aqui, os alunos deverão colorir as figuras de acordo com as instruções das legendas:



(a) (b)

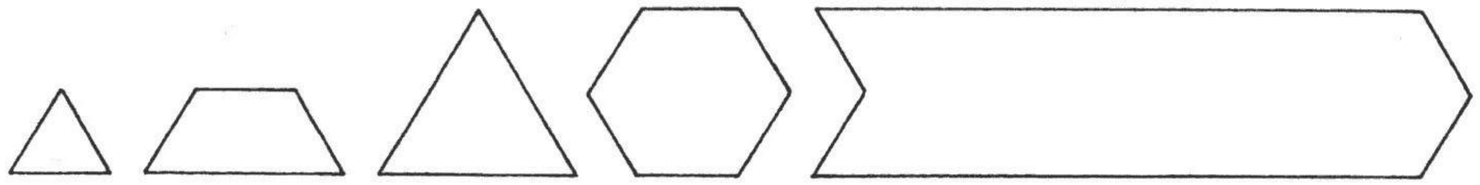
Observe-se que a figura *a* é formada por 12 trapézios congruentes. Assim, é fácil colorir cada porção indicada por uma fração de denominador 12. Cada trapézio é uma "unidade de referência" e, assim: $6/12$ são 6 trapézios; $4/12$ são 4 trapézios; $2/12$ são 2 trapézios.

Já na figura *b*, a situação se complica, pois as frações têm denominador 40 e não há 40 losangos. No entanto, se cada

losango for decomposto em 2 triângulos, haverá 40 deles na figura. Assim, a "unidade de referência" aqui é o triângulo, e podem-se colorir 8 triângulos de azul, 9 de verde, 16 de laranja e 7 de vermelho, conforme solicitado.

Terceira atividade

Forneça a cada aluno uma folha contendo as seguintes figuras como modelo:



Em seguida, peça que reproduzam e recortem várias figuras iguais às do modelo, que eles poderão manipular à vontade para responder às questões a seguir:

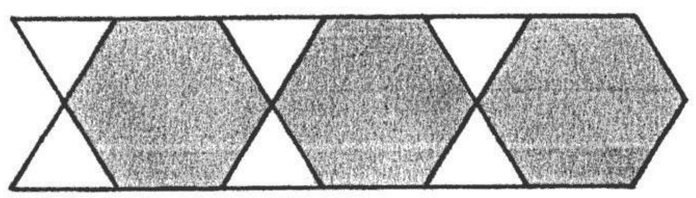
a) Quantos triângulos pequenos (I) são necessários para cobrir o trapézio (II), o triângulo grande (III) e o hexágono regular (IV)?

b) O triângulo pequeno corresponde a que fração do trapézio, do triângulo grande e do hexágono regular?

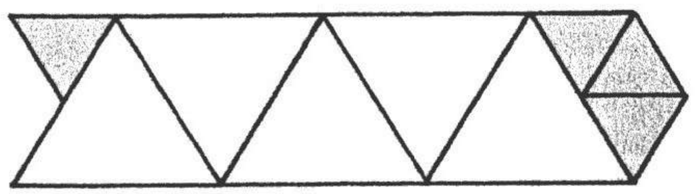
c) Quantas figuras de cada tipo são necessárias para cobrir o polígono não-regular (V)? A que fração desse hexágono (V) corresponde cada uma das demais figuras?

Diz-se que um polígono é *regular* quando *todos* os seus lados e *todos* os seus ângulos internos são congruentes.

Ao responder a essa pergunta, os alunos irão perceber que, no caso do triângulo pequeno e do trapézio, a resposta é direta, mas no caso do triângulo grande e do hexágono regular não é possível recobrir toda a figura diretamente. Será necessário decompor cada um deles em triângulos pequenos, para recobrir os espaços vazios do hexágono não-regular. Assim, o triângulo pequeno será a unidade de referência para a solução do problema.



(São 4 hexágonos; 3 inteiros e 1 decomposto em triângulos pequenos.)



(São 6 triângulos grandes; 5 inteiros e 1 decomposto em triângulos pequenos.)

Quarta atividade

Agora, os alunos podem começar a resolver problemas como os que seguem.

1. Uma pessoa tem um terreno e quer construir uma casa, de tal modo que:

a) $\frac{1}{4}$ do terreno seja ocupado pela casa;

b) $\frac{1}{2}$ do terreno se destine ao pomar;

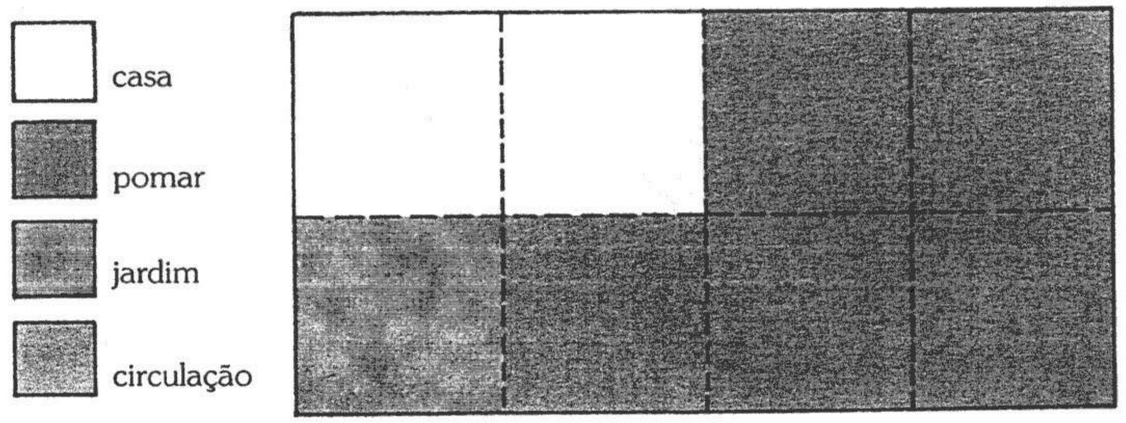
c) $\frac{1}{8}$ para o jardim;

d) $\frac{1}{8}$ para a circulação.

Desenhe uma planta para essa casa.
Há diferentes soluções para esse problema, como por exemplo:

É muito importante discutir com a classe todas as possibilidades encontradas pelos alunos.

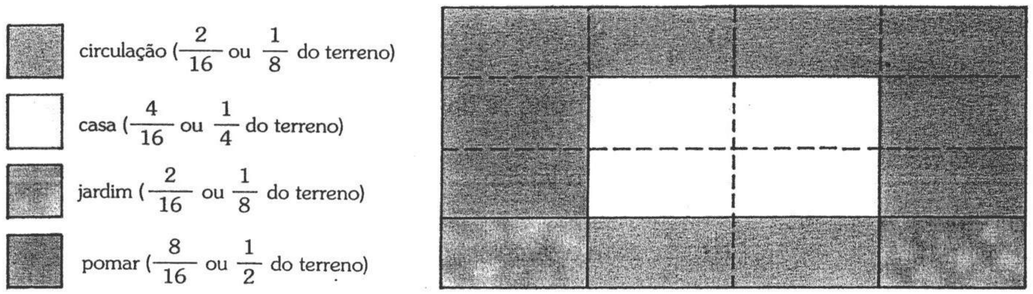
Discutido e resolvido o problema, pode-se aumentar o grau de dificuldade:



2. O jardim e a área de circulação devem ficar em frente da casa.

3. Essa mesma casa deve ficar localizada no centro do terreno.

Aqui, se usarmos como unidade de referência a menor fração indicada no problema ($1/8$), não será possível satisfazer a condição pedida. Nesse caso, será necessário determinar uma nova fração, uma "unidade intermediária" que nos permita resolver a questão. Vamos escolher a fração $1/16$, mas poderia ser também $1/32$, $1/64$, etc.

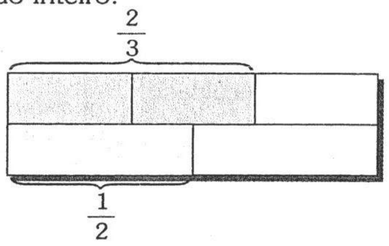


Ao final de atividades desse tipo, os alunos estarão preparados para resolver problemas mais complexos de operações com números fracionários.

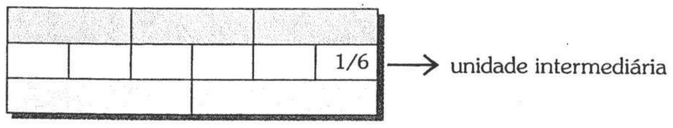
Adição e subtração

Quando os alunos já estiverem usando com facilidade a idéia de uma fração intermediária como unidade de medida de várias outras, podem-se introduzir as operações de adição e subtração em que a equivalência das frações não seja evidente. Acompanhe os exemplos.

a) Para resolver $2/3 + 1/2$, vamos utilizar as tiras de papel-cartão para representar e comparar os "terços" e os "meios" do inteiro.

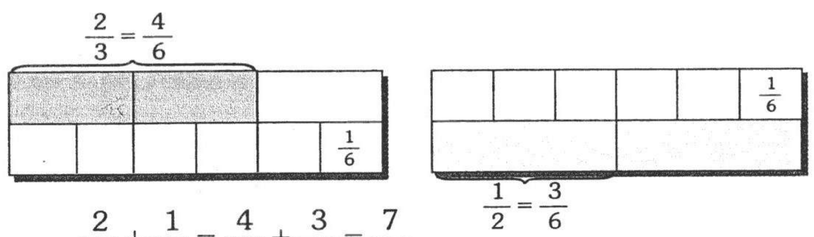


Como não há coincidência entre as repartições das duas tiras, devemos procurar uma tira intermediária, cujas divisões coincidam com as repartições das duas tiras consideradas. Na própria sala de aula podem ser encontradas várias soluções: de "sextos" do inteiro, de "doze avos", de "dezoito avos", etc.



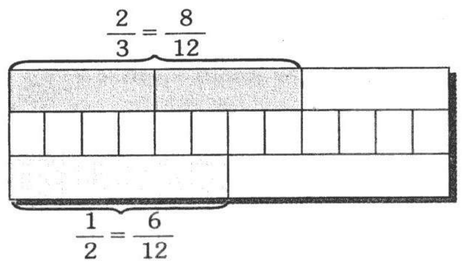
Assim, conforme a tira intermediária, encontramos:

Solução 1:



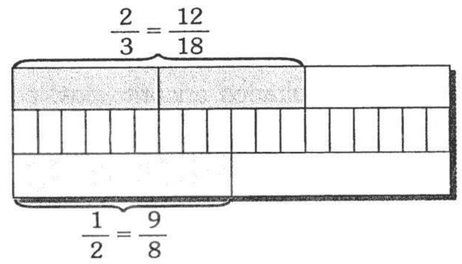
$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6}$$

Solução 2:



$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{8}{12} + \frac{6}{12} = \frac{14}{12}$$

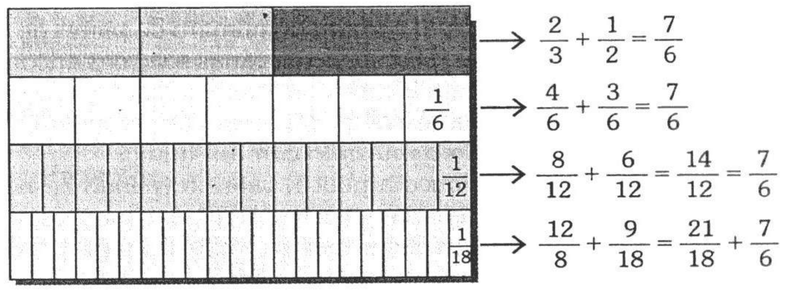
Solução 3:



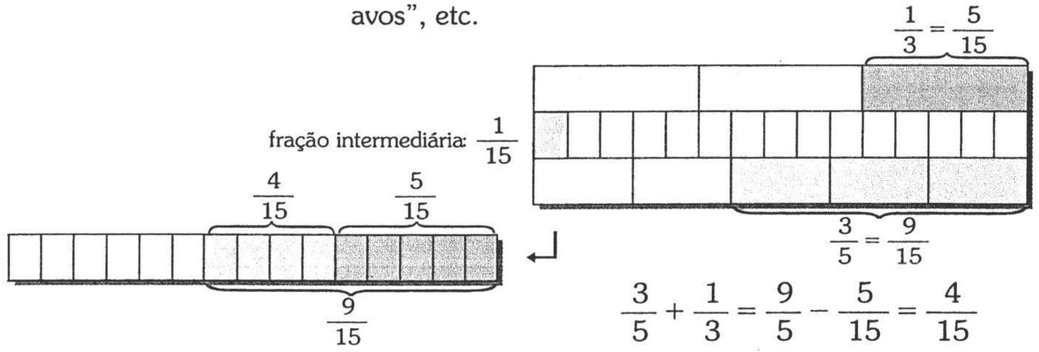
$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{12}{18} + \frac{9}{12} = \frac{21}{18}$$

Quando comparamos as frações $7/6$, $14/12$, e $21/18$ podemos perceber que são equivalentes:

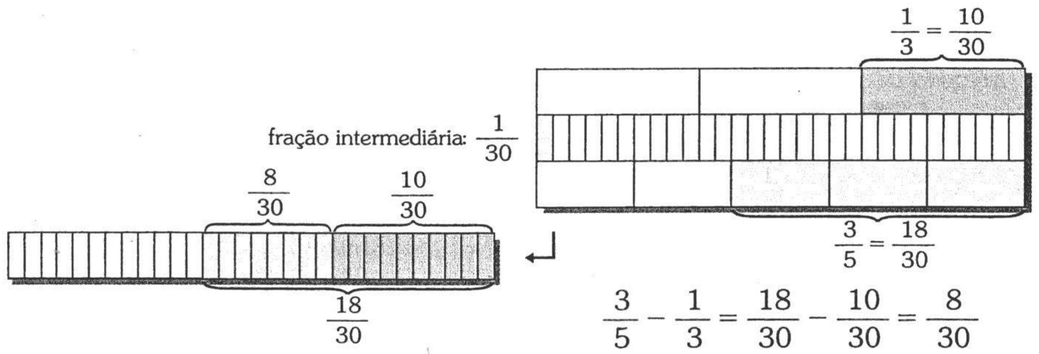
$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6} \text{ ou } \frac{14}{12} \text{ ou } \frac{21}{18}, \text{ etc.}$$



b) Para resolver $3/5 - 1/3$, vamos utilizar as tiras de "terços" e de "quintos" do inteiro. Não há coincidência entre suas repartições. Vamos procurar, então, uma tira intermediária, que poderá ser a de "quinze avos", a de "trinta avos", etc.

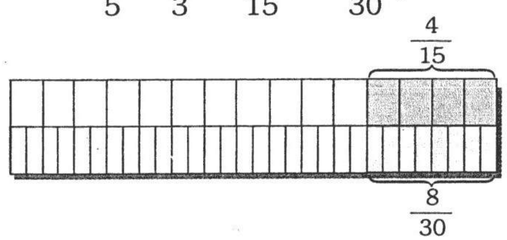


$$\frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \frac{9}{5} - \frac{5}{15} = \frac{4}{15}$$



$$\frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{18}{30} - \frac{10}{30} = \frac{8}{30}$$

Comparando os resultados encontrados, constatamos que são equivalentes: $\frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$ ou $\frac{8}{30}$, etc.



A partir de situações como essas, os alunos vão descobrindo que o número de partes da fração intermediária é sempre um *múltiplo comum* do número de partes de cada uma das frações dadas. Discutindo as várias soluções encontradas na classe, eles chegam à conclusão de que é mais prático, para resolver o problema, escolher o *menor* desses múltiplos comuns, ou seja, o *mínimo múltiplo comum* (mmc)

Pouco a pouco, vai-se tornando desnecessário o manuseio de material para resolver tais situações, e os alunos passam a compreender melhor a clássica regra "reduzir as frações dadas ao mesmo denominador."

Pouco empregado em nossos dias, o termo *avo* significa partícula, porção diminuta de algo. Vem da terminação da palavra *oitavo*, do latim *octavus*. Atualmente é usado apenas em frações que têm denominadores maiores que dez: um doze avos, três quinze avos, etc. O avo compõe também o centavo (cento + avo), que é a centésima parte, o centésimo. Em alguns países, como no Brasil, o termo *centavo* representa a centésima parte da unidade monetária.

Multiplicação

Ao iniciar o trabalho de multiplicação envolvendo dois números fracionários, os alunos irão deparar, pela primeira vez, com uma *mudança de significado* na operação. A multiplicação, que até então representava a *adição reiterada de parcelas iguais*, passa a representar *partes de partes de um total considerado*.

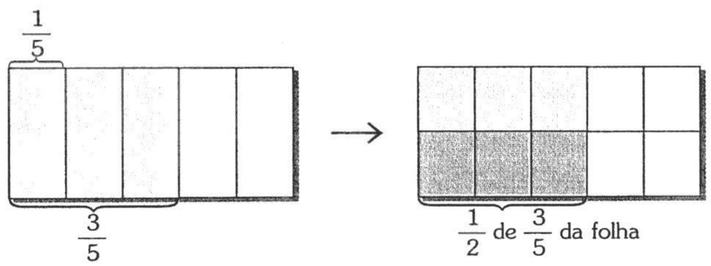
Trabalhando agora exclusivamente com o conjunto dos números racionais, os alunos em geral estranham que o resultado da multiplicação de dois números possa ser um número menor que cada fator. Afinal, eles estão acostumados com a multiplicação de números naturais, em que o resultado, quando não-nulo, é sempre maior ou igual a cada um dos fatores. Por exemplo:

$$3 \times 0 = 0$$
$$3 \times 1 = 3$$
$$3 \times 2 = 6$$
$$3 \times 3 = 9$$
$$\ldots$$

$\boxed{3 \times n > 3 \text{, para } n > 1}$

Vejamos agora alguns exemplos na nova situação:

a) Calcular a metade de $3/5$ de uma folha de papel (grandeza de natureza contínua).



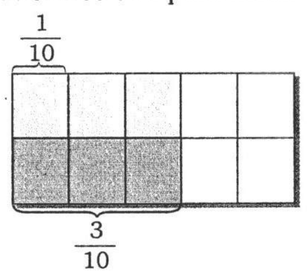
Representaremos essa situação por: $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$.

Para encontrar a fração que representa o resultado de $1/2 \times 3/5$, usamos uma nova unidade intermediária para medir o inteiro:

A folha fica repartida em 10 porções iguais; assim, cada porção corresponde a $1/10$ da folha.

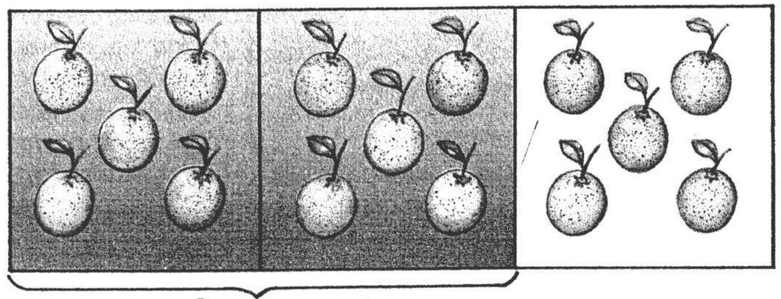
Portanto:

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$



b) Calcular $^2/_3$ de 15 laranjas (grandeza de natureza discreta).

Esse tipo de problema já foi trabalhado anteriormente. Agora, basta dar uma representação para a operação realizada.



$\frac{2}{3}$ das 15 laranjas

Vamos retomar aqui a indicação que já vem sendo utilizada em situações ligadas à multiplicação, ou seja, com a utilização da preposição *de*:

- 5×4 representa 5 grupos **de** 4;
- 3×5 representa o triplo **de** 5;
- $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$ representa $\frac{1}{2}$ **de** $\frac{3}{5}$, ou a metade **de** $\frac{3}{5}$;
- $\frac{2}{3} \times 15$ representa $\frac{2}{3}$ **de** 15.

Ao trabalhar com porcentagem, usaremos ainda:

$$\frac{15}{100} \times 40 \text{ representa } 15\% \textbf{ de } 40.$$

É importante destacar novamente: regras práticas não são condenáveis. O que criticamos é sua apresentação precoce, sem que o aluno tenha oportunidade de construir o significado delas. É claro que a criança logo percebe que pode encontrar o resultado de uma multiplicação de frações *multiplicando seus numeradores e seus denominadores*. A diferença, porém, está em saber como chegar a essa regra.

Divisão

No caso da divisão com dois números fracionários, embora seja bem mais fácil simplesmente apresentar a regra prática, vale a pena concretizar algumas situações para que os próprios alunos cheguem a ela.

Pode-se partir de uma situação-problema que envolva a idéia de medir. Vejamos um exemplo:



Pela figura, os alunos observam que:

$$\frac{1}{2} = 3 \times \frac{1}{6}, \text{ ou } \frac{1}{2} \div \frac{1}{6} = 3$$

Outra forma de abordar a divisão de frações é apresentá-la como a operação inversa da multiplicação. Por exemplo:

$$\text{Se } \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{4 \times 5} = \frac{6}{20}$$

$$\text{Então, } \frac{6}{20} \div \frac{2}{5} = \frac{6 \div 2}{20 \div 5} = \frac{3}{4}$$

Nesse caso, basta dividir os numeradores e os denominadores, para obter o resultado. E poderíamos fazer o mesmo se tivéssemos $^{15}/_{14} \div {}^3/_7$:

$$\frac{15}{14} \div \frac{3}{7} = \frac{15 \div 3}{14 \div 7} = \frac{5}{2} \text{ ou } 2\frac{1}{2}$$

Ou seja:

$$\frac{5}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{5 \times 3}{2 \times 7} = \frac{15}{14}$$

O problema aparece quando os termos da primeira fração não são múltiplos de seus correspondentes na segunda. Por exemplo:

$$\frac{3}{5} \div \frac{7}{4} = \frac{3 \div 7}{5 \div 4}$$

Nesse caso, o que se pode fazer é obter *frações equivalentes* a essas, com denominadores iguais:

$$\frac{3}{5} \div \frac{7}{4} = \frac{12}{20} \div \frac{35}{20}$$

Agora, podemos dividir os numeradores e os denominadores. Obtemos, então:

$$\frac{12}{20} \div \frac{35}{20} = \frac{12 \div 35}{20 \div 20} = \frac{12 \div 35}{1} = 12 \div 35 = \frac{12}{35}$$

Daí o resultado: $\frac{3}{5} \div \frac{7}{4} = \frac{12}{35}$.

A partir de exercícios como esses os alunos poderão chegar à regra prática de "multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda". A diferença, nesse caso, é saber de onde surgiu a regra.

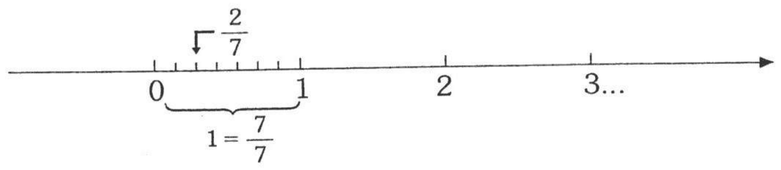
Representação de frações na reta numérica

O trabalho de comparação de números fracionários pode ser completado e ampliado com atividades que consistem em localizar os números fracionários entre dois números naturais na reta numérica.

Vejamos os seguintes exemplos:

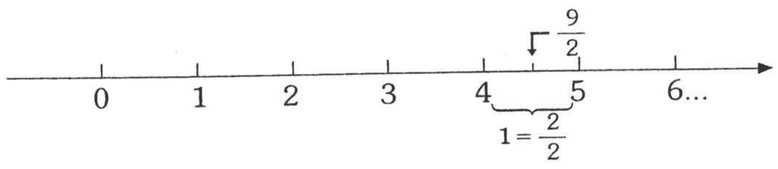
a) Representar $\frac{2}{5}$ na reta numérica.

Esse número é maior que 0 e menor que 1. Então, sua localização está entre esses dois números:



b) Representar $\frac{9}{2}$ na reta numérica.

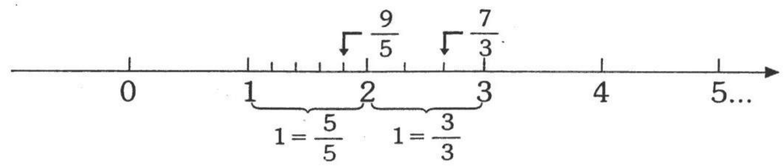
Esse número equivale a $4\,1/2$. Logo, é maior que 4 e menor que 5. Portanto, está entre esses números:



c) Comparar $\frac{7}{3}$ e $\frac{9}{5}$.

O número $7/3$ é equivalente a $2\,1/3$; logo, está entre 2 e 3.

O número $9/5$ equivale a $1\,4/5$; logo, está entre 1 e 2. Na reta numérica, temos:



Pela localização dos dois números na reta, fica bem claro que $7/3 > 9/5$. No entanto, para a criança que não teve oportunidade de construir os conceitos e apenas decorou regras isso não parece correto, pois a fração $9/5$ é formada de algarismos que representam números maiores que os da fração $7/3$.

II. Os números decimais

A representação decimal pode ser tratada como decorrente, simultaneamente, dos princípios do sistema de numeração decimal e da representação fracionária.

O professor pode, então, apresentar as frações decimais explicando que recebem essa designação por terem, no denominador, somente o número 10, ou potências de 10 (100, 1 000, etc.).

Sinal dos tempos

É interessante observar que uma das grandes vantagens da notação posicional (sua aplicação às frações decimais) somente foi reconhecida cerca de 1 000 anos depois de sua criação, no século VI d.C.

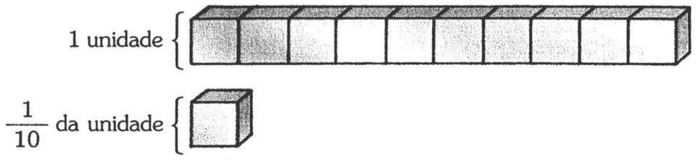
Em 1579, Viète, o maior matemático da França, recomendava insistentemente o uso das frações decimais. Em 1585, Stevin, o principal matemático dos Países Baixos, reforçava com mais veemência ainda a recomendação do colega francês. Em 1617, o escocês John Napier produziu uma obra referindo-se ao trabalho de Stevin, sugerindo uma representação das frações decimais tal como a que hoje usamos. Propunha também o uso de um ponto para separar a parte inteira da decimal, tal como fazem hoje os americanos e como vemos nas calculadoras.

Segundo o professor Ubiratan D'Ambrosio, da Unicamp (Universidade Federal de Campinas), uma das tendências para o próximo milênio é a total substituição da representação fracionária pela decimal — como, aliás, já vem ocorrendo no visor das calculadoras e nos computadores.

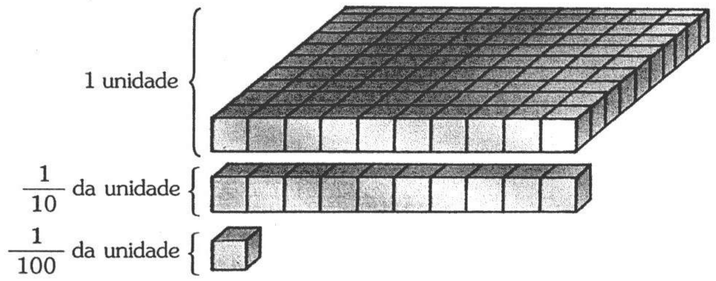
A partir de um trabalho com material dourado ou com figuras em papel quadriculado, os alunos estabelecem relações entre o décimo, o centésimo, o milésimo e o inteiro.

Quando adotamos o cubinho como padrão, ele representava 1 unidade e as demais peças eram seus múltiplos. Agora, as peças maiores podem representar 1 unidade e as menores, seus submúltiplos. Vejamos alguns exemplos:

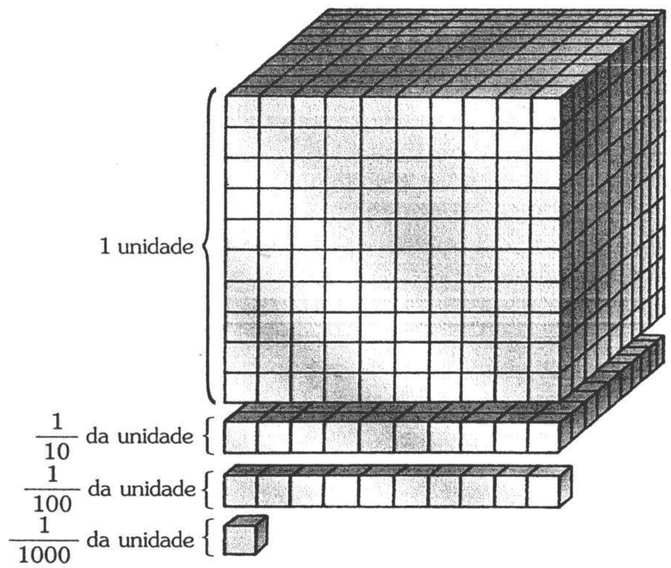
a) Considerando como unidade a barra, cada cubinho será sua décima parte (ou $1/10$ da barra).



b) Considerando como unidade a placa, cada barra será sua décima parte, e cada cubinho, sua centésima parte:



c) Considerando como unidade o cubo grande, a placa será sua décima parte, a barra será a centésima, e cada cubinho corresponderá à milésima parte:



Desse modo, os alunos conseguem verificar que essas frações se comportam como os números naturais, com agrupamentos e trocas na base 10. Assim, é possível fazer uma representação posicional para elas, tal como no caso dos números naturais, usando-se uma vírgula para distinguir a parte inteira da parte menor que o inteiro:

PARTE INTEIRA			PARTE DECIMAL		
C	D	U	Décimo	Centésimo	Milésimo
		1,			
		0,	1		
		0,	0	1	
		0,	0	0	1
		⋮			

Nossa moeda

O momento é oportuno para trabalhar com a representação da nossa moeda, como aplicação dos números decimais. A partir de folhetos de propaganda, anúncios e recortes de jornais e revistas, pode-se pedir aos alunos que observem como os preços das mercadorias são expressos.

Os alunos farão diversas observações, entre elas a de que, no número, sempre há uma vírgula, seguida de mais dois algarismos. Como acabaram de estudar notação decimal, é bem provável que a maioria conclua que ali estão representados os décimos e os centésimos do real.

Desse modo, fica fácil para as crianças compreenderem que centavo é a centésima parte do real; portanto, que 100 centavos formam 1 real.

Em alguns países existe uma fração específica para representar a décima parte da unidade monetária e outra para a centésima parte. Nos Estados Unidos, por exemplo, o *dime* equivale à décima parte do dólar, e o *cent*, à centésima. No Brasil, a décima parte do real é representada pela moeda de 10 centavos, sem nenhum nome específico (bem poderia ser chamada de "1 deciavo", não é mesmo?).

Sabemos que a maior parte dos alunos tem pouco acesso a dinheiro, mas é importante que eles tenham, se possível, a oportunidade de examinar todas as notas e moedas de real.

Apesar de ainda não termos trabalhado as operações com números decimais, é possível sugerir diversas situações da vida prática que envolvem cálculos com reais e centavos, permitindo, assim, que os alunos apliquem o conceito de unidades, décimos e centésimos.

Vejamos algumas atividades que podem ser realizadas com a manipulação do nosso dinheiro (ou sua reprodução em papel cartolina).

1. Escolha várias moedas até totalizar R$ 1,00.
2. Um menino trabalhou durante toda a manhã fazendo carreto na feira e recebeu gorjetas nos seguintes valores: 80 centavos; R$ 1,30; 2 reais; R$ 0,75; 50 centavos. Quanto ele recebeu no total?
3. Faça um levantamento dos produtos da cesta básica que você pode comprar com um salário mínimo.

Quando o dividendo não é múltiplo do divisor

Já vimos que é possível representar o resultado da divisão de dois números naturais por meio de uma fração

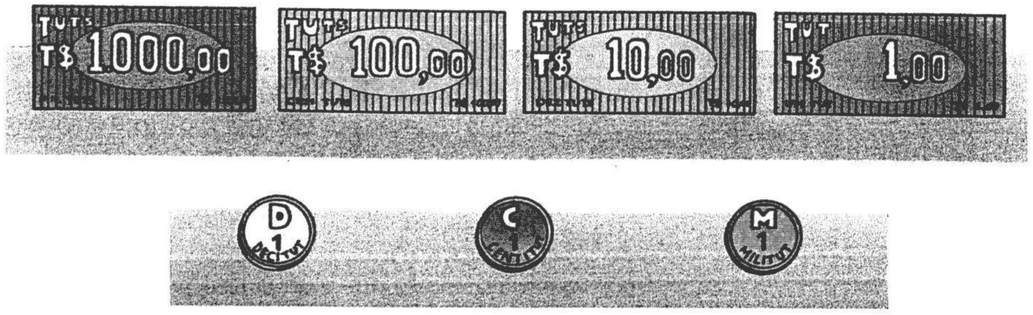
$$m \div n = \frac{m}{n}$$

$$(n \neq 0)$$

Agora, vamos ver como se apresenta esse mesmo resultado usando números decimais.

Depois que os alunos já perceberam que os números decimais se comportam como os naturais, com agrupamentos e trocas na base 10, a tarefa do professor se torna mais simples. É bastante produtivo iniciar o trabalho empregando material concreto, como material dourado, figuras em papel quadriculado ou dinheiro que os próprios alunos confeccionam a partir de figuras mimeografadas conforme a ilustração abaixo.

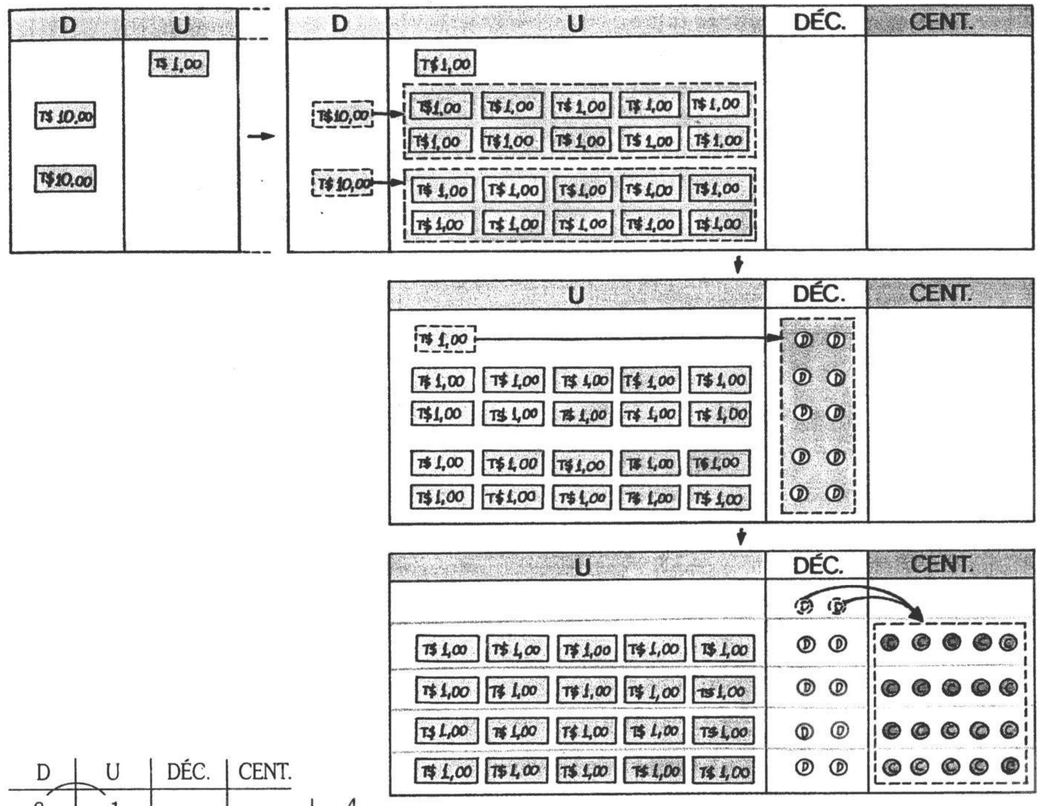
Os alunos deverão colorir as notas e moedas, dando um nome ao dinheiro (pode ser tut, que já utilizamos). O ábaco de papel poderá servir como carteira para colocar o dinheiro.



Em primeiro lugar, retoma-se a atividade de agrupar unidades de 10 em 10, trocando-as pela unidade de ordem superior. Por exemplo, 10 moedas de decitut são trocadas por 1 nota de 1 tut; 10 moedas de 1 centitut valem 1 decitut.

Agora já podem ser apresentadas atividades com as seguintes situações:

1. Reparta igualmente 21 tuts entre 4 pessoas.



D	U	DÉC.	CENT.
2	1		
2	0	10	
	1	8	20
		2	20
			0

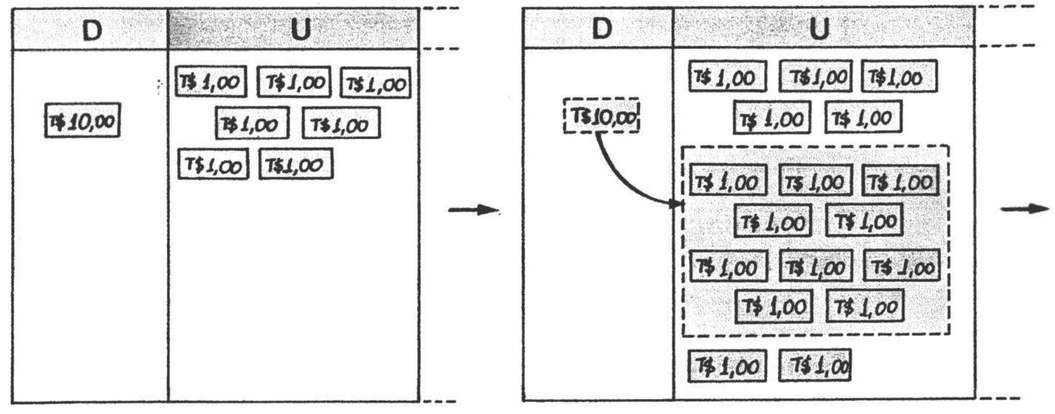
4

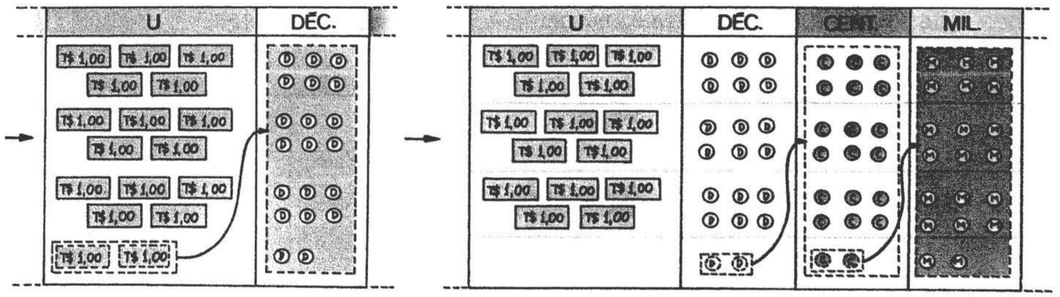
5 U, 2 DÉC., 5 CENT.

Assim, os estudantes verificam que podem representar:

$$21 \div 4 = \frac{21}{4} \text{ ou } 5{,}25$$

2. Comprei 3 cadernos iguais por 17 tuts. Qual o preço de cada um?





D	U	DÉC.	CENT.	MIL.
1	7			
1	5	20		
	2	18	20	
		2	18	20
			2	18
				2
				⋮

3

5 U, 6 DÉC., 6 CENT., 6 MIL.

Então, podemos representar:

$$17 \div 3 = \frac{17}{3} \text{ ou } 5,666...$$

Com atividades desse tipo, os alunos verificam que na divisão de dois números naturais, quando o dividendo não é múltiplo do divisor, ocorrem as seguintes situações:

a) resto zero e resultado com quantidade finita de casas decimais (*número decimal exato*);

b) reto diferente de zero e resultado cujas casas decimais se repetem infinitamente (*dízima periódica*).

Podemos dizer que nas dízimas periódicas também encontramos exemplos de seqüências, cujo *motivo* agora recebe o nome de *período*.

Nas dízimas periódicas *simples*, o período se apresenta logo após a vírgula. Por exemplo:

1,353535...; 0,182182182...; 23,7777777; etc.

Já as dízimas periódicas *compostas* apresentam em primeiro lugar uma parte não periódica e depois o período. Exemplos: 2,71333333...; 0,5424242...; 12,712040404...; etc.

Mas esses detalhes não devem ser trabalhados antes da 6ª série.

Comparação de números decimais

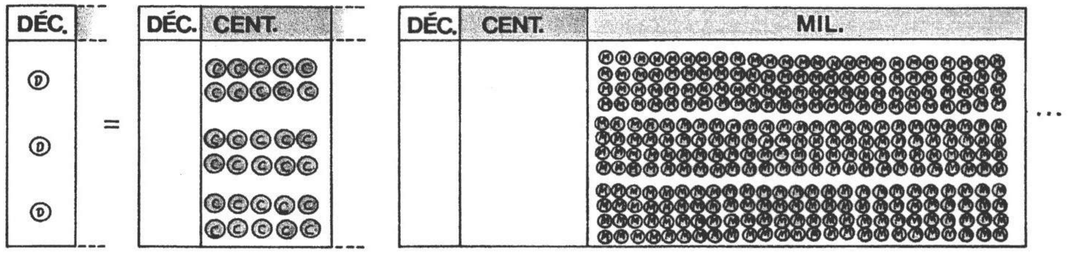
Em geral, a maioria dos alunos sente muita dificuldade em compreender, por exemplo, que 0,5 é maior que 0,34. Mesmo tendo visto que é possível retirar ou acrescentar zeros à direita do último algarismo significativo de um número decimal sem alterar seu valor, quase nunca se lembram de aplicar essa regra.

Novamente, isso acontece porque não entendem como se desenvolveu a regra.

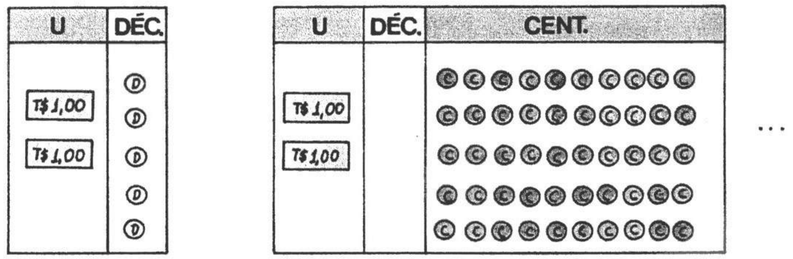
Por isso, é muito importante que os alunos trabalhem com o material dourado, "dinheiro" ou com as figuras em papel quadriculado para poder tirar suas próprias conclusões.

Vejamos alguns exemplos:

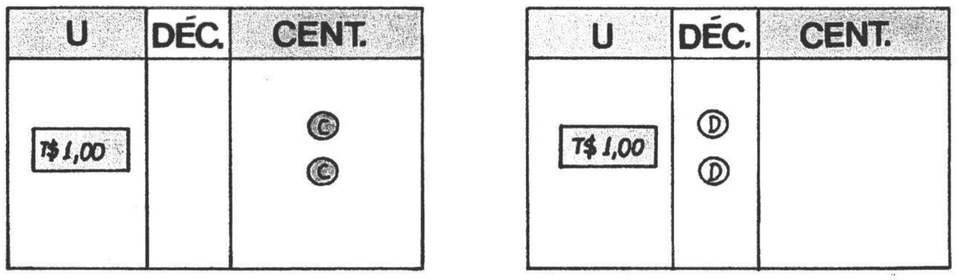
a) $0,3 = 0,30 = 0,300 = ...$



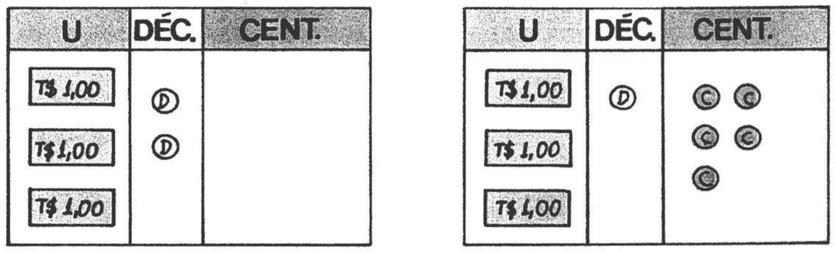
b) $2,5 = 2,50 = 2,500 = ...$



c) $1,02 < 1,2$



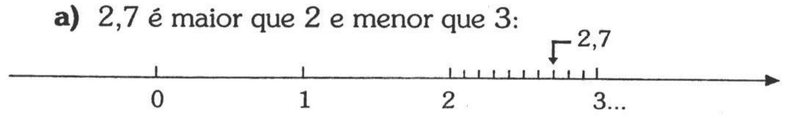
d) $3,2 > 3,15$



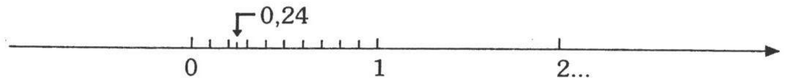
Representação na reta numérica

Conforme vimos ao tratar de números fracionários, a utilização da reta numérica facilita o trabalho de comparação de números racionais. Ao comparar números decimais, será útil aos alunos saber localizar na reta entre quais números naturais eles se encontram. Por exemplo:

a) 2,7 é maior que 2 e menor que 3:



b) 0,24 é maior que 0 e menor que 1:



Operações com números decimais

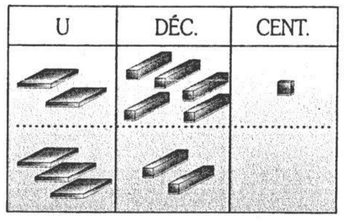
Quando os alunos compreendem a representação decimal dos números racionais por analogia com os números naturais, não demonstram dificuldade em relação às operações com números decimais, desde que se permita a eles o uso do ábaco e do material de manipulação, sempre que sentirem necessidade.

Adição e subtração

Esse é um trabalho bastante simples de realizar. Vejamos alguns exemplos:

a) Calcule 2,51 + 3,2.

No ábaco:

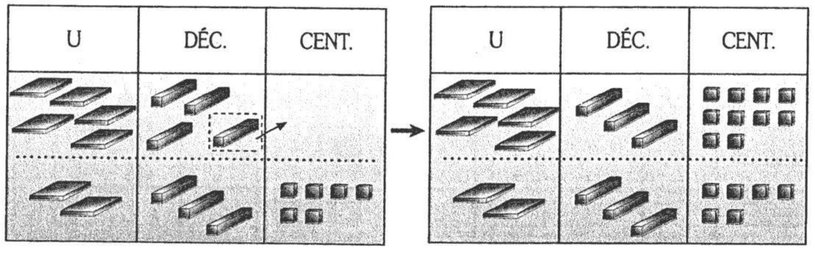


No algoritmo:

U	DÉC.	CENT.
2,	5	1
3,	2	0 +
5,	7	1

b) Calcule 5,4 − 2,36.

No ábaco:



No algoritmo:

U	DÉC.	CENT.
5,	$^{3}\not{4}$	10
2,	3	6 −
3,	0	4

O trabalho com ábaco e algoritmo permite aos alunos visualizar que, nas operações de adição e subtração de números decimais, a parte inteira, os décimos, os centésimos, etc. dos numerais envolvidos devem estar alinhados, da mesma forma que, nas operações com números naturais, as unidades alinham-se com unidades, dezenas com dezenas, centenas com centenas, etc.

Preparando a multiplicação e divisão

Para introduzir aos alunos a multiplicação e divisão com números decimais, sugerimos que o professor apresente antes uma seqüência de operações em que um número decimal é multiplicado ou dividido por 10 ou qualquer potência de 10.

O objetivo dessas atividades é levar os alunos a perceber que, nesse tipo de operações, o resultado é formado pelos mesmos algarismos do número decimal, mudando apenas as ordens ocupadas por eles.

A partir disso, fica fácil entender as seguintes regras práticas:

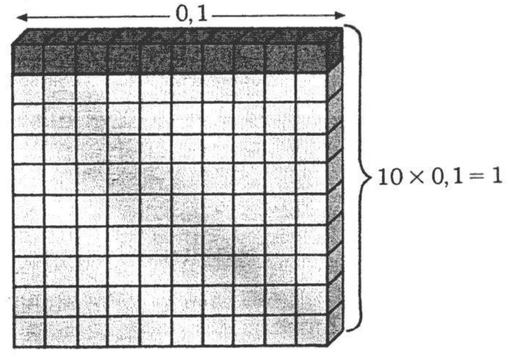
Para multiplicar números decimais por 10 ou potências de 10, mantenha os mesmos algarismos do número decimal e desloque a vírgula para a direita uma, duas, três, etc. casas, de acordo com a potência de 10 que está sendo usada.

Para dividir números decimais por 10 ou potências de 10, mantenha os mesmos algarismos do número decimal e desloque a vírgula para a esquerda uma, duas, três, etc. casas, de acordo com a potência de 10 que está sendo usada.

Vejamos, a seguir, uma sugestão de trabalho.

Primeira atividade

a) Utilizando o material dourado (ou figuras correspondentes em papel quadriculado), e considerando como unidade a placa, da qual a barra representa 0,1, calcule $10 \times 0{,}1$.

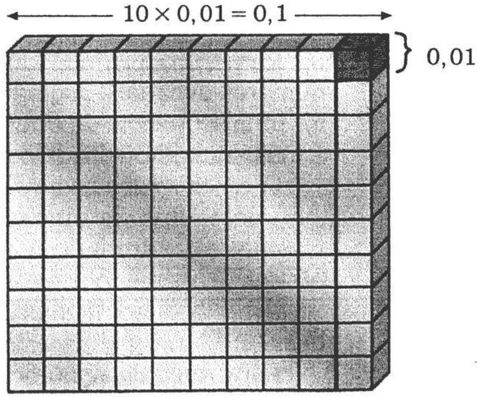


b) A partir desse resultado, calcule $100 \times 0,1$.

Usando a propriedade associativa da multiplicação, podemos escrever $100 = 10 \times 10$. Assim,

$$100 \times 0,1 =$$
$$= 10 \times 10 \times 0,1 =$$
$$= 10 \times 1 = 10$$

c) Agora calcule $10 \times 0,01$.



Segunda atividade

Calcule:

a) $10 \times 2,34$

$(10 \times 2,34 = 2,34 + 2,34 + 2,34 + 2,34 + 2,34 + +2,34+ 2,34 + 2,34 + 2,34 + 2,34 = 23,4)$

b) $100 \times 2,34$

Para facilitar esse cálculo, os alunos podem usar o resultado já encontrado em *(a)* e a propriedade associativa da multiplicação:

$$100 \times 2,34 =$$
$$= 10 \times 10 \times 2,34 =$$
$$= 10 \times 23,4$$

$(10 \times 23,4 = 23,4 + 23,4 + 23,4 + 23,4 + 23,4 + + 23,4+ 23,4 + 23,4 + 23,4 + 23,4 = 234)$

Então, $100 \times 2,34 = 234$.

Terceira atividade

Pode-se trabalhar a divisão como operação inversa da multiplicação, propondo-se questões como:

a) Se $10 \times 3,65 = 36,5$, qual o resultado de $36,5 \div 10$?

b) Se $100 \times 1,234 = 123,4$, qual o resultado de $123,4 \div 100$?

Pela observação dos resultados:

$$36,5 \div 10 = 3,65$$
$$123,4 \div 100 = 1,234$$

Com o material utilizado na primeira atividade, calcule:

c) $1 \div 10$

d) $1 \div 100$

e) $0,1 \div 10$

Multiplicação

Antes de iniciar a multiplicação com dois números decimais, é bom apresentar aos alunos situações envolvendo números naturais, de modo que possam verificar a seguinte propriedade:

Em uma multiplicação com dois números naturais, quando se multiplica um dos fatores por um número natural, o produto também ficará multiplicado por esse número.

Por exemplo:

Em uma caixa podem ser embalados 6 livros iguais. Em 5 caixas idênticas a essa, serão guardados $5 \times 6 = 30$ livros iguais aos primeiros. Se embalarmos, em uma caixa, o dobro da quantidade inicial de livros ($2 \times 6 = 12$), em 5 caixas seriam acondicionados $5 \times 12 = 60$ livros (60 é o dobro de 30).

Vale também a seguinte propriedade:

Em uma multiplicação com dois números naturais, se dividirmos um dos fatores por um número natural, o produto também ficará dividido por esse número.

Por exemplo:

Se no problema anterior, em que eram embalados 6 livros iguais em cada caixa ($5 \times 6 = 30$), colocássemos em cada uma das caixas a metade dos livros ($6 \div 2 = 3$), dentro das 5 caixas estaria acondicionada a metade dos 30 livros.

$5 \times 3 = 15$ livros ($30 \div 2 = 15$)

Assim, da primeira propriedade, podemos concluir que:

Em uma multiplicação com dois números naturais, se multiplicarmos cada um dos fatores por um número natural, o resultado ficará multiplicado pelo produto dos números.

Por exemplo:

Trabalhando ainda com o problema das 5 caixas com 6 livros em cada uma ($5 \times 6 = 30$), se usássemos o quádruplo das caixas e em cada caixa colocássemos o triplo dos livros, o total de livros embalados ficaria multiplicado por 12 (ou 4×3).

5	×	6	=	30
↓		↓		↓
×4		×3		×12
↓		↓		↓
20	×	18	=	360

Ou seja: $5 \times 4 \times 6 \times 3 = 5 \times 6 \times 4 \times 3 = 30 \times 12 = 360$

Note-se que em todas as propriedades estudadas está presente a idéia de proporcionalidade (veja p. 198).

Relacionando todos esses conhecimentos, é possível calcular o produto de dois números decimais transformando-os em números naturais e fazendo o acerto no resultado final.

Vamos supor, por exemplo, que queremos calcular $2,3 \times 5,28$. Como ainda não sabemos multiplicar números decimais, transformaremos cada um dos fatores em número natural.

Assim, multiplicamos 2,3 por 10 e 5,28 por 100:

$$2,3 \times 10 = 23$$
$$5,28 \times 100 = 528$$

Teremos então:

$$23 \times 528 = 12\,144$$

Esse número é 1 000 (ou 10×100) vezes maior que o resultado procurado:

$$2,3 \times 10 \times 5,28 \times 100 = 2,3 \times 5,28 \times 10 \times 100 = 2,3 \times 5,28 \times 1\,000$$

Então, para corrigir o resultado das duas modificações introduzidas, vamos dividi-lo por 1 000:

$$12\,144 \div 1\,000 = 12,144$$

Assim, acabamos por encontrar:

$$2,3 \times 5,28 = 12,144$$

Vejamos, como calcular a metade de 3,254 m de tecido.

Já sabemos que a metade de 3,254, tal como a metade de qualquer outro número, pode ser calculada de vários modos:

$$3,254 \div 2 \text{ ou}$$
$$\frac{1}{2} \times 3,254 \text{ ou}$$
$$0,5 \times 3,254$$

A forma que nos interessa aqui, naturalmente, é $0,5 \times 3,254$. Vamos aplicar o mesmo raciocínio empregado no exercício anterior, ou seja, transformar os dois fatores em número natural.

Assim: $0,5 \times 10 = 5$

$3,254 \times 1\,000 = 3\,254$

Agora calculamos: $5 \times 3\,254 = 16\,270$

Como nosso produto inicial foi multiplicado por 10 000 (ou $10 \times 1\,000$) ou:

$0,5 \times 10 \times 3,254 \times 1\,000 =$
$= 0,5 \times 3,254 \times 10 \times 1\,000 =$
$= 0,5 \times 3,254 \times 10\,000$

Fazemos agora a correção, dividindo-o por 10 000:

$$16\,270 \div 10\,000 = 1,6270 \text{ ou } 1,627$$

Ou seja: $0,5 \times 3,254 = 1,6270$ ou 1,627

Aos poucos, os alunos vão descobrindo o motivo pelo qual se aplica a regra prática de multiplicar os fatores sem a vírgula e depois, no resultado, separar com a vírgula o número total de casas decimais correspondente aos dois fatores.

Divisão

Também aqui convém iniciar o tema com operações de divisão entre números naturais, a fim de que os alunos possam observar algumas regras que lhes serão úteis na construção do algoritmo.

Vamos ver, então, o que acontece com o resultado de uma divisão quando modificamos o dividendo, o divisor, ou ambos.

Observe a seguinte situação-problema:

Uma senhora comprou 30 balas para repartir igualmente entre seus 3 filhos. Cada um receberá: $30 \div 3 = 10$. Se ela tivesse comprado o dobro das balas, cada um receberia: $60 \div 3 = 20$. Se, ao chegar em casa trazendo as 30 balas, ela tivesse encontrado 6 crianças brincando e resolvesse dar-lhes as

balas, cada uma receberia: $30 \div 6 = 5$. Se tivesse comprado o dobro das balas e distribuído entre as 6 crianças, cada uma teria recebido: $60 \div 6 = 10$.

Em resumo:

Em uma divisão, quando multiplicamos o dividendo por um número qualquer, o quociente fica multiplicado por esse mesmo número:

$$\begin{array}{ccccc} 30 & \div & 3 & = & 10 \\ | & & & & | \\ \times 2 & & & & \times 2 \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 60 & \div & 3 & = & 20 \end{array}$$

Quando multiplicamos o divisor por um certo número, o quociente fica dividido por esse número:

$$\begin{array}{ccccc} 60 & \div & 3 & = & 20 \\ & & | & & | \\ & & \times 2 & & \div 2 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 60 & \div & 6 & = & 10 \end{array}$$

Quando multiplicamos o dividendo e o divisor por um mesmo número, o quociente não se modifica:

$$\begin{array}{ccccc} 30 & \div & 3 & = & 10 \\ | & & | & & \\ \times 2 & & \times 2 & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 60 & \div & 6 & = & 10 \end{array}$$

Podemos verificar propriedades equivalentes ao dividir o dividendo, o divisor ou ambos por um certo número.

Em geral, quando deparamos pela primeira vez com uma divisão de números decimais, não sabemos o que fazer com as casas decimais. O passo mais importante, então, é conseguir uma divisão equivalente, em que só haja números naturais. Usando as propriedades que acabamos de examinar, fica fácil resolver o problema. Basta multiplicarmos cada número por uma potência de 10 adequada.

Acompanhe os exemplos a seguir:

1. Uma costureira comprou uma peça de fita de 2,7 m de comprimento, para fazer enfeites usando 0,45 m de fita por enfeite. Calcule quantos enfeites ela conseguirá fazer.

Sabemos que a solução será encontrada com $2{,}7 \div 0{,}45$. Para que 2,7 se torne um número natural, basta multiplicá-lo por 10:

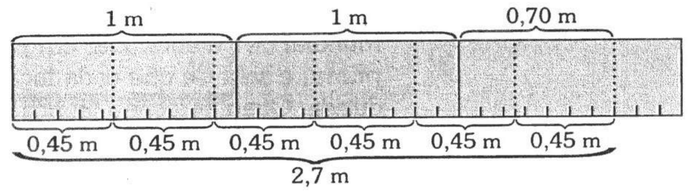
$$2{,}7 \times 10 = 27$$

Já o número 0,45 deverá ser multiplicado por 100:

$$0{,}45 \times 100 = 45$$

De acordo com a terceira propriedade, quando multiplicamos os dois termos da divisão por um mesmo número, o quociente não se modifica. Portanto, é mais interessante multiplicar os dois números decimais pelo mesmo número. No caso, 10 seria uma boa escolha para tirar a vírgula de 2,7, mas não seria suficiente para 0,45. Vamos usar, então, o 100, que serve para os dois números. Assim:

$$\begin{array}{ccccc} 2{,}7 & \div & 0{,}45 & = & \\ | & & | & & \\ \times 100 & & \times 100 & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 270 & \div & 45 & = & 6 \end{array}$$



Concluindo: $2{,}7 \text{ m} \div 0{,}45 \text{ m} = 6$ enfeites

Convém lembrar que, nessa divisão, estamos usando a idéia de *medir*. Isso é fundamental para se entender a natureza da resposta encontrada. É muito comum o aluno dividir, por exemplo, metro por metro e dar a resposta "em metro".

2. Um sorveteiro pretende usar 4,2 litros de leite para fazer 3 tipos diferentes de sorvete. Se ele reservar a mesma quantidade de leite para cada sabor, quantos litros usará em cada um?

Encontra-se a solução, fazendo-se $4{,}2 \div 3$.

Para fazer de 4,2 um número natural, basta multiplicá-lo por 10:

$$4{,}2 \times 10 = 42$$

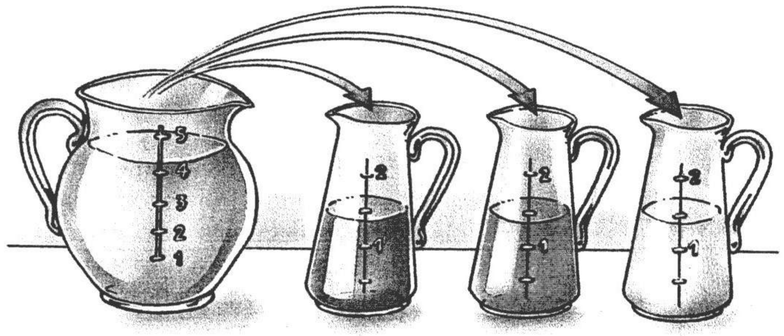
Aplicando agora a terceira propriedade, multiplicamos os dois termos da divisão pelo mesmo número. Assim, teremos:

$$\begin{array}{ccccc} 4{,}2 & \div & 3 & & \\ | & & | & & \\ \times 10 & & \times 10 & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 42 & \div & 30 & = & 1{,}40 \end{array}$$

Logo: $4{,}2\ \ell \div 3 = 1{,}4\ \ell$.

Nesse caso, podemos pensar em uma situação de divisão ligada à idéia de repartir igualmente :

4,2 (litros) ÷ 3 (sabores) = 1,4 (litro) para cada (sabor)



3. Uma fábrica vai produzir taças de ouro para o Campeonato Mundial de Futebol. Há, em estoque, 7,875 kg de matéria-prima, e sabe-se que cada taça exige 1,25 kg para ser produzida. Quantas taças a fábrica poderá produzir, sem comprar mais material?

Novamente, temos aqui a idéia de medir:

7,875 kg ÷ 1,25

Podemos multiplicar os dois números por 1 000 para tirar as vírgulas:

7,875 × 1 000 = 7 875
1,25 × 1 000 = 1 250
7 875 ÷ 1 250

UM	C	D	U.	DÉC.
7	8	7	5	
7	5	0	0	3750
0	3	7	5	3750
				0

1250

0	0	0	6,	3
UM	C	D	U	DÉC.

O resultado é: 7,875 kg ÷ 1,25 kg = 6,3 taças.

Isso significa que poderão ser produzidas 6 taças e sobrará material para 0,3 de uma nova taça.

Quando se ensina a divisão de decimais, comumente se apresenta a regra prática de igualar as casas, mas os alunos, desconhecendo a origem de tal regra, mostram-se incapazes de resolver qualquer dúvida que possa surgir.

Quando, ao contrário, conhecem a justificativa para o artifício utilizado, conseguem, inclusive, buscar seus próprios caminhos. Para dividir 5 por 0,25, por exemplo, uma aluna de 4ª série utilizou o seguinte raciocínio: sabendo que 0,25 × 4 = 1, multiplicou os dois números por 4 e obteve:

5	÷	0,25		
×4		×4		
20	÷	1	=	20

Logo: 5 ÷ 0,25 = 20.

Outros alunos da mesma turma usaram o artifício comum de multiplicar cada número por uma potência de 10 que achassem conveniente e fizeram:

5	÷	0,25		
×100		×100		
500	÷	25	=	20

E concluíram: 5 ÷ 0,25 = 20.

Os alunos ficaram entusiasmados quando descobriram outros caminhos e sentiram-se estimulados a buscar novas formas de "tirar a vírgula" dos números a serem divididos.



COMPLEMENTAR

1. [Números fracionários e medição de terras]

A história refere-se a antigas civilizações que necessitaram da expressão numérica da medição das terras que margeavam os rios que eram fundamentais para a sobrevivência desses povos. As terras eram propriedades do Estado que as arrendava, sob contrato, às famílias, observando que o tamanho da área a explorar era proporcional à força de trabalho do grupo familiar. Em razão da diversidade de tamanho das áreas, o Estado viu-se na contingência de criar sistemas rigorosos de fiscalização que assegurassem o cumprimento das leis referentes à produção e minimizassem as possibilidades de os interesses do Estado serem lesados.

A medida e sua *expressão numérica* foi, pois, uma resposta às relações do indivíduo com o Estado, que cobrava imposto com base na propriedade da terra. As exigências de medição impuseram a criação de padrões de medida ou unidades. Estas unidades, por outro lado, levantaram o fato de que é raro a unidade (ou padrão) caber um número inteiro de vezes na grandeza a medir. O mais freqüente é aplicar-se a unidade sobre a grandeza a ser medida e sobrar uma parte inferior à unidade considerada.

Os medidores de então reconheceram que o instrumento numérico conhecido — números inteiros — era insuficiente para exprimir bem as medidas, isto é, o mais aproximado possível do real. Para obter uma maior aproximação da medida real da grandeza (comprimento, área, etc.) foi forçoso subdividir a unidade num certo número de partes iguais. Têm-se aí frações da unidade.

Era preciso criar um novo instrumento numérico que pudesse exprimir sempre a medida da grandeza por um número. Para superar a impossibilidade dos números inteiros ante a medida, cria-se um novo instrumento numérico: os números fracionários. Agora é possível medir sempre uma grandeza, tomando a unidade e as frações dessa unidade. Como se vê, existe uma relação entre o modo de tratar fração hoje com a própria história da utilização da fração. Daí o fato de o estudo de fração estar quase sempre ligado à área de figuras geométricas.

(LIMA, J. Maurício de F. Iniciação ao conceito de fração e o desenvolvimento da conservação de quantidade. In: CARRAHER, Terezinha . *Aprender pensando.* Petrópolis, Vozes, 1990, p. 82.)

2. [A divisão da melancia]

Monteiro Lobato criou diversas obras de ficção infantil nas quais misturou, notavelmente, a fantasia com o real. No trecho a seguir, o sabugo Visconde ensina frações a Pedrinho.

— Ótimo! — exclamou de repente o Visconde. Esta melancia veio mesmo a propósito para ilustrar o que eu ia dizer. Ela era um *inteiro.* Tia Nastácia picou-a em pedaços, ou *frações.* As frações formam a parte da aritmética de que eu ia tratar agora.

— Se pedaço de melancia é fração, vivam as frações! — gritou Pedrinho.

— Pois fique sabendo que é — disse o Visconde. Uma melancia inteira é uma unidade. Um pedaço de melancia é uma fração dessa unidade. Se a unidade, ou a melancia, for partida em dois pedaços, esses dois pedaços formam duas frações — dois *meios.* Se for partida em três pedaços, cada pedaço é uma fração igual a um *terço.* Se for partida em quatro pedaços, cada pedaço é uma fração igual a um *quarto.* [...]

— Está compreendido. Passe adiante — disse o menino, ansioso para chegar ao fim da lição e avançar na melancia.

— Temos de aprender — continuou o Visconde, o que é *número inteiro* e o que é *número misto.* Número inteiro é a melancia ou as melancias que ainda não foram partidas. Número misto é a melancia inteira com mais uns pedaços ao lado. [...]

— Chega — disse Pedrinho, isto é tão claro que não vale a pena perder tempo insistindo. Agora eu quero saber para que serve conhecer frações.

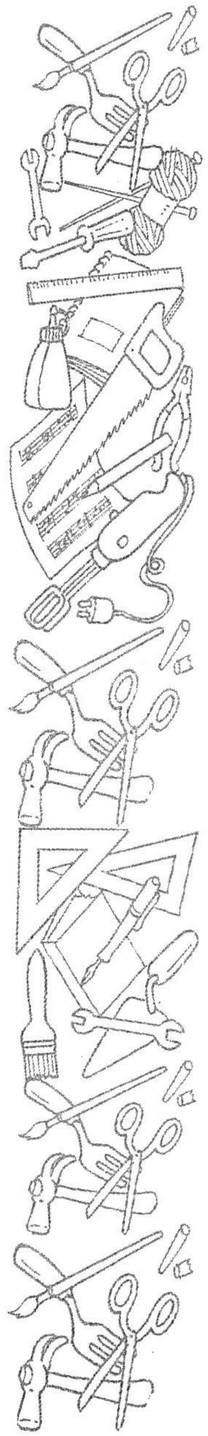
— Para mil coisas — respondeu o Visconde. Na vida de todos os dias a gente lida com frações sem saber que o está fazendo.

(LOBATO, Monteiro. *Aritmética da Emília.* 8. ed. São Paulo, Brasiliense, 1977, p. 92-4.)

Sobre os textos

1. Discuta com seus colegas as duas últimas frases da primeira Leitura Complementar.
2. Leia o texto complementar "A divisão da melancia", para crianças de 3ª ou 4ª série. Depois, peça a elas que exemplifiquem o que está dito na última frase desse texto.

Para você fazer

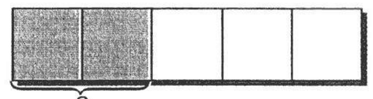


1. A regra manda multiplicar os numeradores e os denominadores dos termos de uma multiplicação com frações. Como é possível fazer isso com $^2/_3 \times 15$? Naturalmente, você colocaria $15 = {}^{15}/_1$. Mas como explicaria isso a seus alunos?
2. Escreva um texto mostrando como você explicaria para seus alunos o seguinte fato: para dividir duas frações em que os termos de uma não são múltiplos de seus correspondentes na outra, devemos obter frações equivalentes com denominadores iguais.
3. Para avaliar dois alunos que haviam sido transferidos de outra escola, o professor apresentou-lhes a seguinte questão: Calcule e demonstre o que você fez por meio de desenhos:

a) $\frac{7}{5} - 1$ b) $2 \div \frac{1}{4}$

O primeiro aluno fez:

a) $\frac{7}{5} - 1 = \frac{7}{5} - \frac{1}{1} = \frac{7}{5} - \frac{5}{5} = \frac{2}{5}$

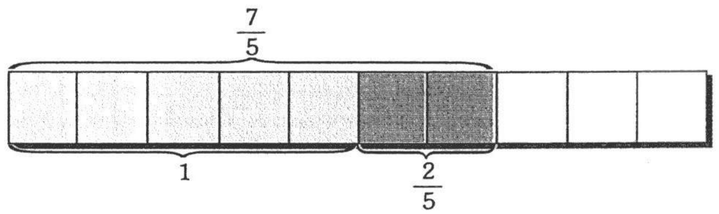


b) $2 \div \frac{1}{4} = \frac{2}{1} \div \frac{1}{4} = \frac{2}{1} \times \frac{4}{1} = \frac{8}{1} = 8$

Não fez figura.

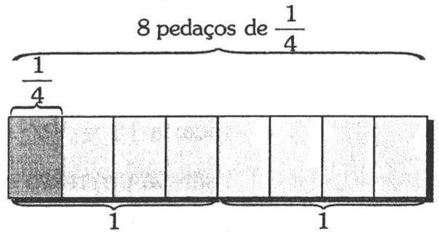
O segundo aluno fez:

a) Um inteiro vale $\frac{5}{5}$. Então, $\frac{7}{5} - 1 = \frac{2}{5}$



b) 1 inteiro tem 4 pedaços de $\frac{1}{4}$; 2 inteiros têm 8 pedaços de $\frac{1}{4}$.

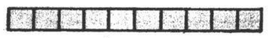
$2 \div \frac{1}{4} = 8$

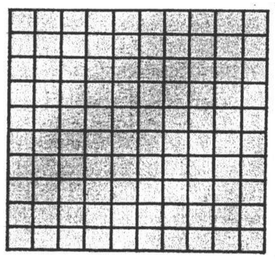


Qual a sua avaliação sobre os conhecimentos de cada um dos alunos quanto aos conceitos ligados aos números fracionários? Discuta isso com seus colegas.

4. Observe as figuras:


quadradinho


barra


placa

Agora responda:

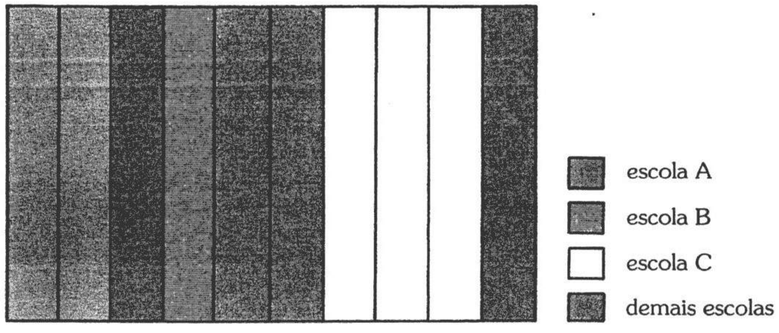
a) Se um quadradinho representar 1 unidade, que número a barra estará representando? E a placa?

b) Se a placa representar 1 unidade, que número a barra representará? E o quadradinho?

c) Se no material dourado a barra representar 1 unidade, o que representarão o cubinho e o cubo grande?

d) Usando o molde correspondente do Anexo 1, construa um cubo e, a seguir, pinte $1/4$ dele. Depois, responda: qual é a representação decimal dessa porção do cubo?

5. Em uma apresentação de ginástica, um campo foi demarcado conforme o seguinte esquema:

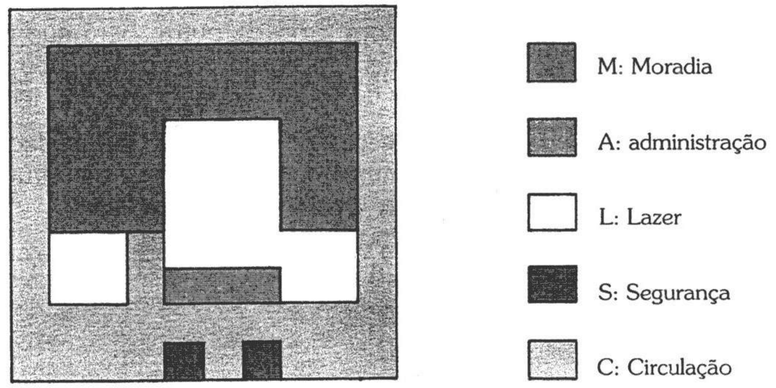


a) Que parte do campo coube a cada escola?

b) Determine que porção do campo é ocupada, ao todo, pelas escolas A, B e C, representando por meio de uma escrita aditiva, e dê o resultado da adição.

c) Que parte do campo sobrou para as outras escolas? Represente por meio de uma subtração.

6. A figura mostra a planta de um conjunto habitacional.



Indique que parte do total é ocupada:

a) pela construção A;

b) pela construção M;

c) pelas construções L e M juntas;

d) pelas construções referentes à administração e à segurança juntas;

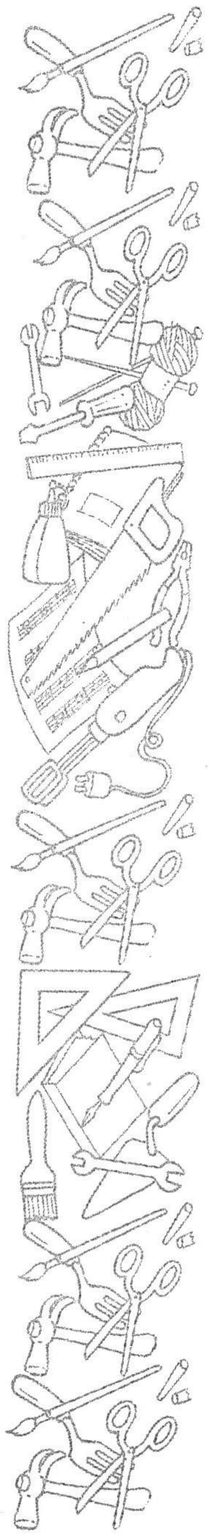
e) pela diferença dos terrenos da área de moradia e da área de lazer;

f) pela parte destinada à circulação.

7. Analise as questões 4, 5 e 6 e discuta com seu grupo, procurando estabelecer para que série do Ensino Fundamental cada uma delas é adequada.

8. Resolva aplicando as propriedades da divisão de números naturais: uma doceira precisa embalar 48 doces em 8 caixas iguais. Quantos doces deve colocar em cada caixa? E se houver apenas 4 caixas para embalar os 48 doces? E se, em lugar de 48, forem apenas 24 doces para as 8 caixas? E se forem 24 doces para ser embalados em 4 caixas?

9. Resolva 3,5 ÷ 0,5 pelo menos de duas formas diferentes.



10. Num laboratório há vários frascos com medidas para serem usados na elaboração de medicamentos. Um funcionário fez várias misturas, conforme foi solicitado. Ajude-o a calcular as medidas:

    a) Adicionando 0,2 unidade* de uma substância a 0,3 de outra, quanto se obtém?

    b) Desenhe o frasco e indique a medida total de uma mistura de 0,36 unidade de uma substância com 0,4 unidade de outra.

    c) O mesmo técnico misturou 4,2 unidades de uma substância com 2,64 de outra. Será que isso é suficiente para encher um frasco com capacidade para 7 unidades? No caso de sobrar ou faltar mistura, indique a quantidade.

    d) É necessário misturar 0,02 unidade de uma substância com uma certa quantidade de outra até completar 1 unidade. Qual é essa quantidade?

11. Elabore e resolva situações que sejam representadas por essas escritas:

    a) $1 - 0{,}7 = \ldots$

    b) $0{,}23 + 1{,}2 + 2 = \ldots$

    c) $7 - (4{,}2 + 2{,}64) = \ldots$

    d) $(0{,}3 + 1{,}42) - 0{,}18 = \ldots$

12. Dona Lúcia quer acarpetar a sala. A planta de sua sala é esta: 5,5 m × 3,8 m . Ela leu no jornal o seguinte anúncio de venda de carpete: de R$ 4,00 o m² de carpete. Quanto ela gastará?

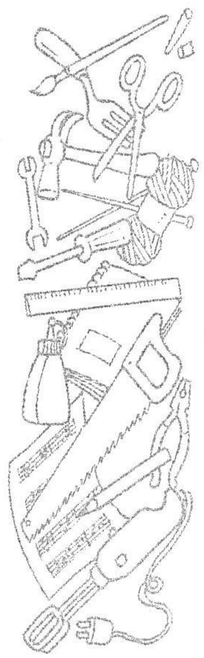
13. Para fazer um varal, uma dona de casa vai precisar de 2,65 m de corda de náilon. Como serão 3 varais, calcule se 10 m serão suficientes.

14. A organizadora de uma quermesse recebeu uma peça de fita e fez a seguinte distribuição: 0,3 da peça ficou com a Barraca da Pescaria; 0,28 com a Barraca do Bingo; o restante foi repartido igualmente entre a Barraca de Tiro ao Alvo e a das Argolas.

    a) Faça uma figura representando a peça toda e as partes de cada barraca.

    b) Que parte da peça irá para a Barraca das Argolas?

* Nos produtos farmacêuticos, costuma-se utilizar como unidade o *cl* (centilitro), o *ml* (mililitro) ou o *cc* (centímetro cúbico), conforme a característica do produto. Nas atividades, usamos "unidade" para nos referir a qualquer uma das medidas citadas.



    c) Se a peça toda tem 100 m, quantos metros ficaram para a Barraca da Pescaria?

15. Dois feirantes estão discutindo como farão para distribuir igualmente uma caixa de 60 kg de tomates em 8 caixas menores. Quanto deverão colocar em cada caixa?

16. Confira com seu grupo a solução que cada participante encontrou. A seguir, o grupo discute se é conveniente ou não trabalhar com esse tipo de questão com alunos de 4ª ou 5ª série.

17. Numa sala de aula, os alunos estavam em polvorosa: um deles havia demonstrado que $1/5$ era igual a $1/6$. Os colegas sabiam que algo estava errado, mas não conseguiam descobrir o quê. O aluno apoiava sua argumentação nas tiras de cartolina: "Peguei uma tira de 10 cm e a dividi em 5 partes iguais; cada parte representa $1/5$. Depois, peguei outra tira de 12 cm e a reparti em 6 partes iguais; cada parte representa $1/6$. Então comparei o pedaço de $1/5$ com o de $1/6$ e achei o mesmo tamanho: 2 cm". Você já descobriu onde o aluno errou?

PARA SABER MAIS

CARRAHER, T. N. (org.). *Aprender pensando*. Petrópolis, Vozes, 1990.

CENTURIÓN, M. *Números e operações*. São Paulo, Scipione, 1994.

COORDENARIA de Estudos e Normas Pedagógicas (Cenp). *Atividades matemáticas*. São Paulo, Secretaria de Estado da Educação, 1991.

_____. *Prática pedagógica: matemática 1º grau*. 4. ed. São Paulo, Secretaria de Estado da Educação, 1993.

_____. *Experiências matemáticas: 5ª série*. São Paulo, Secretaria de Estado da Educação, 1994.

ZUNINO, D. L. de. *A matemática na escola: aqui e agora*. Porto Alegre, Artes Médicas, 1995.



9

GEOMETRIA

Não há ramo da matemática,
por mais abstrato que seja,
que não possa um dia vir a ser aplicado
aos fenômenos do mundo real.

Lobachevsky

Desde que nasce, a criança está em contato com o mundo. Através da visão, da audição, do tato, dos seus movimentos, ela vai explorar e interpretar o ambiente que a rodeia e, antes mesmo de dominar as palavras, conhecer o espaço e as formas nele presentes.

No entanto, a maioria dos currículos escolares do mundo todo, durante longo tempo, não deu a essas experiências a importância devida — sempre se preocuparam muito com as atividades ligadas à linguagem e à quantificação, deixando de explorar a capacidade infantil de percepção espacial em trabalhos com geometria.

Tal fato parece estar relacionado com a tradição — que vem desde Euclides, com sua famosa obra *Elementos* — de se abordar os fatos geométricos básicos de maneira axiomática, ou seja, o estudo da geometria consistia muito mais em aprender a demonstrar teoremas do que em conhecer e interpretar propriedades das figuras geométricas.

Há alguns anos, felizmente, esse panorama vem se modificando; a geometria passa a ser vista como um campo muito rico de oportunidades para:

- o desenvolvimento de outros tipos de raciocínio, na resolução de problemas que exigem visualização e manipulação de modelos de figuras geométricas;
- o desenvolvimento do senso estético e da criatividade, com a utilização das formas geométricas em atividades de composição e decomposição;
- a valorização de alunos cujo raciocínio é mais voltado aos aspectos espaciais que quantitativos da realidade, conseguindo, assim, melhor desempenho nas atividades de geometria do que naquelas ligadas a números.

No Brasil, a partir da década de 80, vemos recomendações feitas pelas Secretarias de Educação da maioria dos estados no sentido de se valorizar o trabalho com geometria desde as séries iniciais. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais, lançados pelo Ministério da Educação e do Desporto em 1997, lemos:

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental, porque, através deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.
>
> A Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa.
>
> Além disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

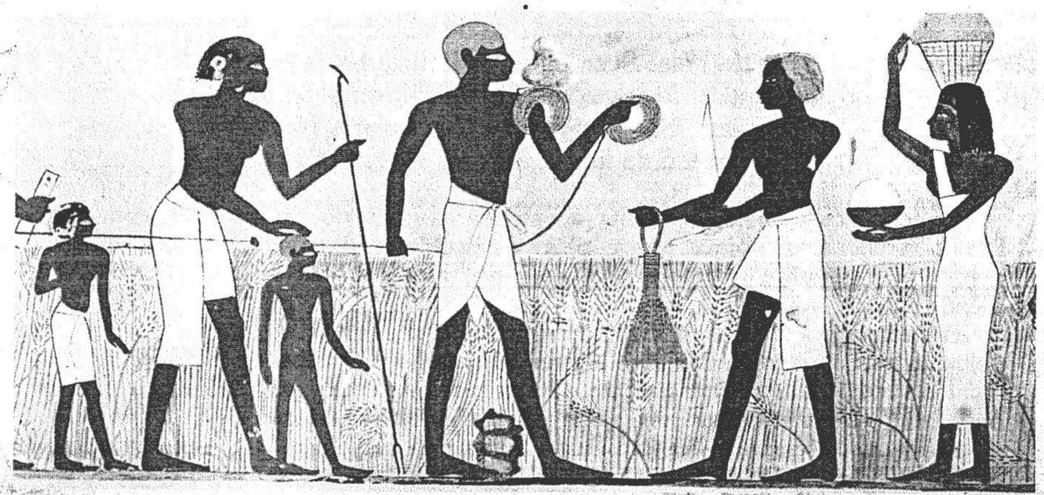
As origens da Geometria

Nada se pode afirmar sobre as verdadeiras origens da geometria. Foi apenas há cerca de 6 mil anos que o homem começou a usar a escrita, e somente a partir daí tiveram início os registros mais organizados, documentando e ilustrando a vida e os costumes dos povos da Antigüidade.

As informações sobre épocas anteriores à escrita são resgatadas de objetos e de vestígios que restaram daqueles povos. Os antropólogos e arqueólogos se encarregam de estudá-los, não raro apoiados em conjecturas sobre o significado e a utilidade das peças encontradas.

Vejamos o que nos diz Carl Boyer em *História da matemática*:

> Afirmações sobre as origens da matemática, seja da aritmética, seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever [...] Heródoto e Aristóteles não quiseram se arriscar a propor origens mais antigas que a civilização egípcia, mas é claro que a geometria que tinham em mente tinha raízes mais antigas.
>
> Heródoto mantinha que a geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do rio. Aristóteles achava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazeres é que tinha conduzido ao estudo da geometria [...]
>
> O fato de os geômetras egípcios serem às vezes chamados de "estiradores de corda" (ou agrimensores) pode ser tomado como apoio a qualquer das duas teorias, pois cordas eram indubitavelmente usadas tanto para traçar as bases de templos como para realinhar demarcações apagadas de terras [...]
>
> O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria [...]
>
> Para o período pré-histórico não há documentos, portanto é impossível acompanhar a evolução da matemática, desde um desenho específico até um teorema familiar [...]
>
> A preocupação do homem pré-histórico com configurações e relações pode ter origem em seu sentimento estético e no prazer que lhe dava a beleza das formas, motivos que muitas vezes propelem a matemática de hoje.



Mural egípcio de 3 000 anos (detalhe) retratando o trabalho de agrimensores e escribas. Tumba de Menna, Egito.

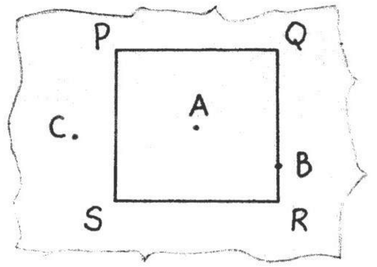
As geometrias

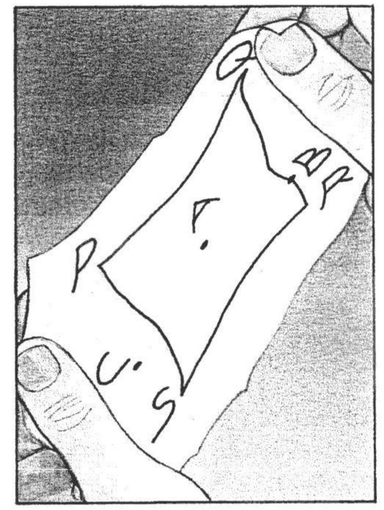
Em *A geometria pelas transformações*, os professores Dienes e Golding definem geometria como a "exploração do espaço". Segundo os autores, a melhor maneira de explorar o espaço é *deslocar-se* por ele ou observar o que acontece com os objetos nele existentes quando se efetua uma mudança — entendendo-se por "mudança" um tipo qualquer de transformação.

Estudando essas transformações — e o que permanece constante numa figura, apesar delas —, os matemáticos foram construindo diversos campos na geometria. Assim, surgiram a *topologia*, a *geometria projetiva* e a *geometria euclidiana ou métrica*.

Topologia

Faça uma experiência: pegue um pedaço de um balão de festa estourado e desenhe nele a figura a seguir.





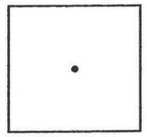
Se esticarmos essa película em várias direções, sem furá-la nem rasgá-la, a figura desenhada se modificará na forma e nas dimensões (lados e ângulos), mantendo, porém, algumas propriedades:

- a figura ainda tem curva fechada;
- o ponto A, que estava dentro da figura, permanece interno;
- o ponto B, que ficava em um dos lados do desenho, continua no mesmo lugar;
- o ponto C permanece externo à figura;
- a superfície externa à curva desenhada permanece do "lado de fora";
- a superfície interna à curva permanece "dentro" dela;
- a curva, denominada fronteira, continua separando o interior do exterior da figura;
- os pontos P e Q continuam sendo vizinhos;
- os pontos P e R permanecem não sendo vizinhos;

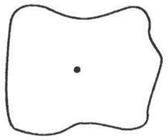
- a ordem dos pontos do quadrado, P, Q, R, S, não foi alterada.

Todas essas propriedades são objeto de estudo da topologia.

Vejamos como uma criança de 4 ou 5 anos observa as propriedades topológicas de uma figura. Peça a ela que copie esta figura:



Ela provavelmente irá fazer algo assim:



A criança não consegue reproduzir o quadrado porque ainda não está suficientemente preparada para observar que os lados são segmentos de reta, que eles são congruentes, nem que seus ângulos são retos. No entanto, ela percebe que a curva é fechada e que o ponto está em seu interior, ou seja, já é capaz de observar as propriedades topológicas da figura.

Geometria projetiva

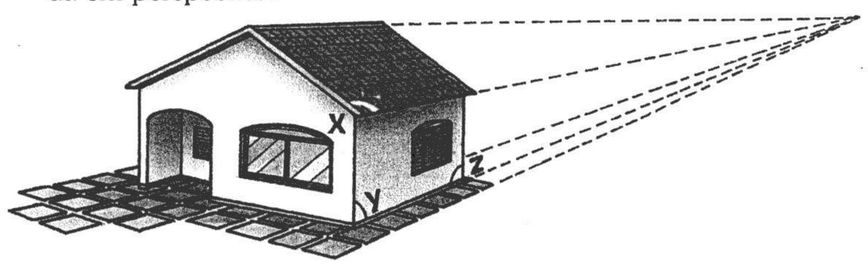
Dienes e Golding afirmam que a geometria projetiva é a "geometria das sombras". De fato, ela estuda o que aconteceu com uma figura projetada a partir de um ponto, ocupando-se das propriedades dessa figura que permanecem constantes, apesar da projeção. É a geometria que estuda a perspectiva.

Para fazer uma experiência sobre isso, recorte um retângulo em papel-cartão e coloque-o sob a luz de uma lâmpada para projetar sua sombra. Então, observe o que acontece com a sombra à medida que você vai mudando a posição do retângulo.

Dependendo de como você o vira, a sombra pode tornar-se até uma simples linha. No entanto, na maioria dos casos, a sombra continuará sendo uma figura de quatro lados, que não se deformam em outro tipo de curva, como acontece com o pedaço de borracha estirado; os ângulos, porém, nem sempre serão retos.

No dia-a-dia, estamos habituados a conviver com as transformações estudadas pela geometria projetiva, presentes, por exemplo, nos desenhos que reproduzem os objetos que nos cercam.

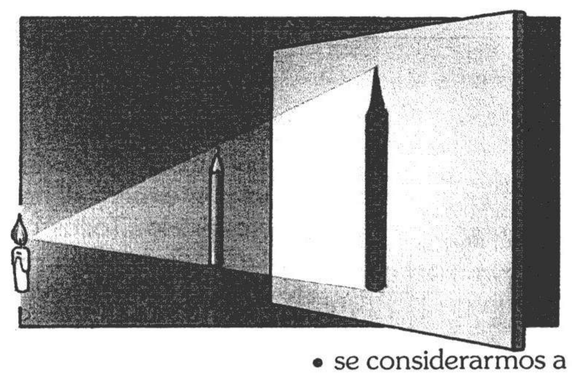
Observe os lados e os ângulos da casinha a seguir, desenhada em perspectiva:

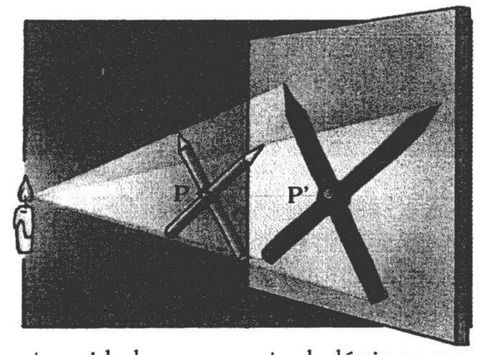


Sabemos que, em uma casa de verdade, o ângulo designado na figura por $X\hat{Y}Z$ mede 90°. No entanto, se o medirmos nessa representação em perspectiva não encontraremos esse valor.

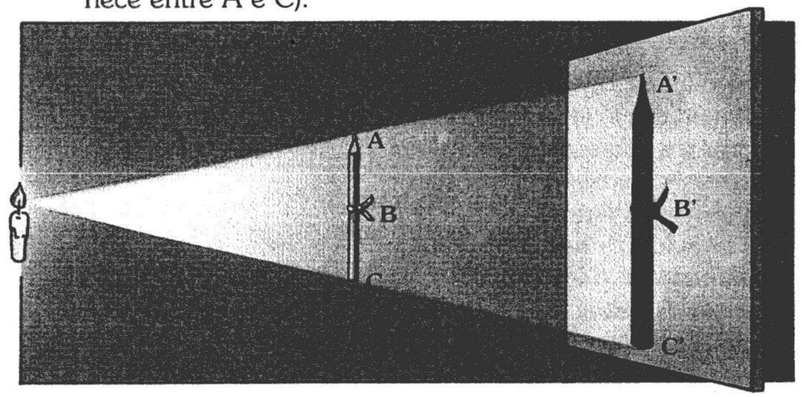
Agora, vejamos quais propriedades permanecem invariáveis quando uma figura é projetada a partir de um ponto:

- se projetarmos um lápis, sua sombra ainda será reta, tal como ele;
- se cruzarmos dois lápis, amarrando-os com um barbante em um ponto P, a sombra também apresentará o cruzamento, no ponto que é a sombra do ponto P, onde está o barbante.





- se considerarmos a extremidade com ponta do lápis como sendo o ponto A, um nó de barbante no corpo do lápis como o ponto B e a outra extremidade como o ponto C (os pontos na ordem ABC), observaremos que, na sombra, os pontos continuam nessa mesma ordem (B permanece entre A e C).

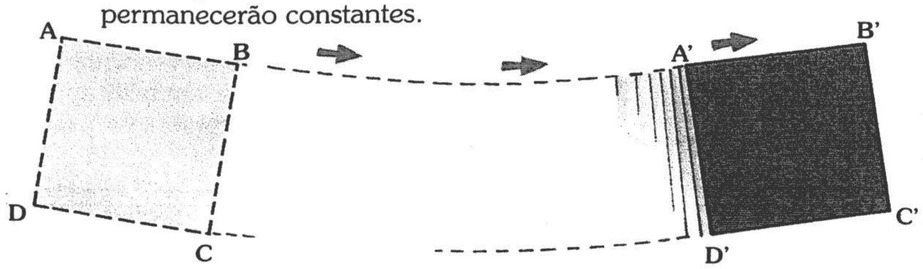


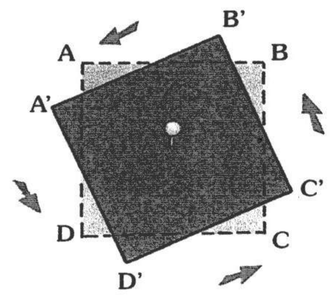
Os exemplos acima ilustram que, na geometria projetiva, as retas, as interseções e a ordem dos pontos são invariantes.

Geometria euclidiana ou métrica

A geometria euclidiana ou métrica estuda o que ocorre com as figuras geométricas quando elas sofrem deslocamento no espaço, mantendo no entanto sua forma ou suas dimensões. Para testar, faça algumas experiências.

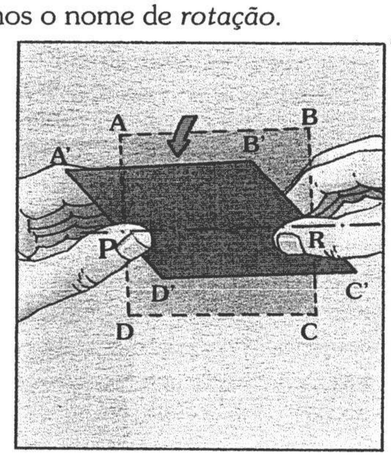
Recorte um quadrado em papel-cartão, coloque-o sobre uma mesa e empurre-o sobre o tampo. Ele vai realizar um movimento de translação e todos os seus pontos vão se deslocar na mesma direção. No momento em que você parar de empurrá-lo, o quadrado passará a ocupar uma nova posição na mesa, mas seus ângulos, bem como todas as distâncias entre seus pontos, permanecerão constantes.





Você pode também prender o quadrado sobre uma tábua, fixando um de seus pontos com alfinete ou tacha, e girá-lo. Todos os pontos mudarão de posição — exceto aquele em que está o alfinete —, mas as medidas dos lados e dos ângulos não serão alteradas. A esse movimento damos o nome de *rotação*.

Você pode ainda girar o quadrado de outro modo. Segure o quadrado entre o polegar e o indicador, por dois de seus pontos (na figura, P e R, por exemplo), e faça-o girar, digamos, meia volta ao redor do eixo PR. Todos os pontos do quadrado irão mudar de posição, exceto aqueles que estão no eixo PR, e a figura continuará com a mesma forma e tamanho.



Geometria na escola

Desde a década de 1940, Jean Piaget desenvolveu pesquisas a respeito da interação da criança com a realidade que a cerca. Baseia-se nessas pesquisas a maioria dos conhecimentos que temos sobre como a criança constrói as noções de espaço e de figura geométrica, bem como suas propriedades e relações.

Segundo Piaget, as primeiras propriedades que a criança observa e consegue compreender são aquelas de natureza topológica, como *dentro*, *fora*, *ao lado de*, *vizinho de*, etc.

Por volta dos 5 ou 6 anos, a criança passa a observar as propriedades de natureza projetiva, como o que vem *antes* ou *depois*, o *primeiro*, o *segundo... o último*, *ao lado de* e, mais tarde, aos 7 anos aproximadamente, o que está *entre*, *à direita* ou *à esquerda*.

Ela não só reconhece a ordem em que se apresentam os objetos observados como também as formas dos objetos são agora mais definidas para ela (por exemplo, já se preocupa em representar como retas as linhas que são retas no objeto mostrado).

Essa etapa do seu desenvolvimento corresponde à fase em que a criança está saindo do egocentrismo e já é capaz de localizar um objeto em relação a outro, e não apenas em relação a si própria.

Somente a partir dos 9 ou 10 anos ela começa a se interessar pelas dimensões dos objetos, ou seja, pelas propriedades de natureza métrica, tais como comprimento dos lados, abertura dos ângulos de um polígono, etc.

Com base nessas pesquisas e fundamentada na idéia de *currículo em espiral* de Bruner, a proposta curricular da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (agora reforçada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais) apresenta uma seqüência de trabalho que divide o curso de geometria no Ensino Fundamental em três períodos:

- familiarização com as figuras geométricas (planas e não-planas);
- descoberta de propriedades;
- estabelecimento de relações (entre figuras e entre propriedades).

Nelson Toledo



Há várias situações na escola que favorecem o trabalho inicial com geometria.

Quanto à preocupação sobre o que priorizar no trabalho inicial, lembremo-nos de que a criança já nasce em contato com o espaço e as formas geométricas nele presentes. Assim, a exploração dessa realidade será o nosso material didático — a sala de brincar (suas paredes, portas e janelas), os objetos que se encontram nela ("O que há *em cima* desta mesa?", "E *atrás* daquela porta?", "E *dentro* do armário?"), bem como as primeiras noções de localização espacial ("O escorregador fica *perto* da cantina", "Minha carteira fica *longe* da mesa da professora", "Minha casa fica *ao lado* da padaria").

Vejamos a seguir algumas sugestões de trabalho, envolvendo vivência do espaço e familiarização com as formas, que serão muito úteis como iniciação ao estudo da geometria.

Vivência do espaço

Na idade pré-escolar, as crianças estão iniciando a construção de seu espaço representativo, ou seja, começam a tornar-se capazes de interiorizar suas ações, de falar sobre locais e objetos, bem como de representá-los graficamente, ainda que estejam ausentes.

Assim, é importante que nessa fase a criança possa vivenciar diversas situações ligadas a localização espacial e esquema corporal, sempre acompanhadas de verbalização.

Vejamos algumas possibilidades.

Realização e representação de percursos

São inúmeras e variadas as possibilidades de realização desse tipo de atividade.

Podem ser feitas excursões na própria escola, bem como passeios pelas ruas próximas. Os alunos são incentivados a observar os pontos que consideram marcantes em cada percurso. De volta à classe, deverão representar, individualmente ou em dupla, o passeio realizado.

É importante notar que as representações dos caminhos de ida e volta oferecem níveis diferentes de dificuldade, devido à ordem ocupada pelos pontos percorridos (relacione isso com o estudo sobre séries e seqüências).

Terminada a representação (só ida ou ida e volta, dependendo do nível dos alunos), convide e incentive os alunos a mostrar o trabalho aos colegas, para que a classe comente.

Nesse momento, o professor deve estar atento aos detalhes narrados, a fim de incentivar os alunos no sentido de enriquecerem suas descrições. Faça perguntas do tipo: "O que há na rua atrás da escola?"; "O prédio do correio é alto ou baixo?"; "A avenida que atravessamos é larga ou estreita?"; "O tronco da paineira que vimos na pracinha é grosso ou fino?"; "Havia brinquedos na pracinha? Eram muitos ou poucos? Quais eram?", etc.

Outra atividade muito interessante, que explora direção e sentido — e que levará, mais tarde, ao conceito de ângulo —, é a realização de percursos indicados.

Inicialmente, um aluno será o "robô", que só se movimenta quando recebe uma ordem. Saindo de um ponto de partida, ele obedecerá a uma ordem de cada vez, dada pelos colegas, em revezamento: "Caminhe até o escorregador"; "Siga até a árvore que está perto do portão"; "Agora vire para o lado da cantina e continue andando"; "Pare atrás do banco".

Os outros alunos, além de avaliar se o robô está seguindo corretamente as ordens, podem se revezar em marcar com giz, no chão, a trajetória percorrida.

Como se pode observar, os exemplos sugeridos para as ordens dadas ao robô são de natureza topológica. Com alunos mais adiantados, podem-se usar ordens de natureza projetiva:


Nelson Toledo

Crianças brincando de robô no pátio da escola.

"Caminhe quatro passos para a frente"; "Vire meia-volta à direita e caminhe dois passos"; "Passe entre Ana e Pedro e caminhe para a frente, até o muro".

Como prolongamento dessa atividade, pode-se agora traçar uma trajetória no chão. O robô deverá percorrê-la, sem olhar para a figura desenhada, obedecendo às ordens dadas pelos colegas.

Os demais alunos avaliam se o robô executou corretamente as ordens recebidas e se estas foram dadas corretamente.

Convém lembrar que, para as crianças que ainda não deixaram totalmente a fase egocêntrica, não é fácil dar essas ordens, colocando-se sob o ponto de vista do robô. Atividades ligadas à lateralidade devem ser empregadas com cuidado, pois esse domínio se desenvolve muito lentamente, em etapas:

- dos 5 aos 8 anos, aproximadamente, a criança só domina a *sua* direita e a *sua* esquerda; assim, ela só conseguirá dar esse tipo de ordem ao robô posicionando-se atrás dele e olhando no mesmo sentido;
- dos 8 aos 11 anos, aproximadamente, ela estará saindo da fase do egocentrismo e começando a dominar as posições à direita ou à esquerda de alguém à sua frente; nessa fase, já consegue dar ordens ao robô colocado à sua frente;
- por volta dos 11 anos, estará relacionando as informações de maneira suficientemente descentrada para compreender se um objeto está à direita (ou esquerda) de alguém, qualquer que seja sua posição em relação à pessoa.

Ainda com relação a trajetos, pode-se sugerir a atividade Descoberta do Tesouro: uma equipe prepara um mapa que as demais devem seguir para tentar encontrar o tesouro. Se nenhuma equipe conseguir, o grupo se reúne para analisar as instruções do mapa. Se forem consideradas bem-feitas, o tesouro ficará com a equipe que traçou o mapa. Caso contrário, ninguém fica com o tesouro, corrige-se o mapa e a brincadeira recomeça.

Essa atividade também pode ser apresentada a crianças de diferentes níveis, dependendo da área permitida para o esconderijo, do grau de detalhamento a ser dado ao mapa ou às instruções, etc.

No caso de alunos de 3 a 5 anos, ou mesmo de 6, ainda é cedo para utilizar mapas ou listas de instruções, por isso convém usar os códigos *quente e frio* para indicar quando as crianças estão se aproximando ou se afastando do local do tesouro.

Localização de objetos em relação ao próprio corpo

Jogos no pátio da escola, com bolas, cordas e petecas, podem ser usados para trabalhar a localização de objetos em relação ao próprio corpo.

Uma possibilidade é inventar uma competição com a bola. A classe forma filas de 5 alunos, que serão as equipes. Depois, cada um passa a bola para o colega de trás, e vence a equipe que terminar primeiro. Pode-se repetir o jogo, fazendo a bola percorrer o sentido inverso, do último aluno da fila para o primeiro. Variações: passar a bola por cima da cabeça, entre as pernas, pelo lado direito, somente com a mão esquerda, etc.

Também é interessante o jogo que associa a localização de objetos com brincadeiras de palavras. A classe forma um círculo e cada um deve jogar a bola para um colega qualquer, dizendo uma palavra: nome de fruta, brinquedo, marca de automóvel, de um dos colegas, conforme decisão prévia do grupo. O aluno que recebe a bola diz outra palavra da mesma categoria, mas sem repetir as que já foram ditas.

Na brincadeira de corda, cada aluno deve pular de acordo com as regras estipuladas pelo grupo: pular normalmente até errar; pular 5 vezes e sair da corda; entrar com a corda já em movimento; pular com um pé só, etc.

É muito comum, também, a brincadeira de jogar a bola contra a parede e apanhá-la na volta, sem deixar que caia, dizendo uma expressão a cada batida: "Ordem, seu lugar, sem rir, sem falar, um pé, o outro, uma mão, a outra, bate palmas, fim". Na primeira rodada, cada aluno apenas joga a bola, recitando a seqüência. A partir da segunda rodada, a seqüência toda fica subordinada a cada ordem dada. Por exemplo, em "seu lugar" a criança deve fazer todas as jogadas sem sair do lugar; em "sem rir", não poderá rir enquanto joga, e assim por diante. Para "fim", o jogador deve repetir a seqüência obedecendo à respectiva ordem em cada jogada. Quem errar sai do jogo.

Depois dos jogos, cada aluno representa com um desenho ou colagem aquele que mais lhe agradou, mostra-o aos colegas e justifica sua escolha.

Familiarização com a forma

A escola deve oferecer à criança situações em que ela entre em contato (mesmo que inicialmente de modo apenas sensorial) com todo tipo de objeto, seja tridimensional, seja bidimensional, seja linear, seja unidimensional.

Limitar a criança ao retângulo-triângulo-quadrado-círculo é impedi-la de explorar sua bola, seu estojo, a corda que ela pula ou o barbante com que amarra coisas; e também os lápis, as embalagens de alimentos, de brinquedos, o pneu que rola no pátio, etc.

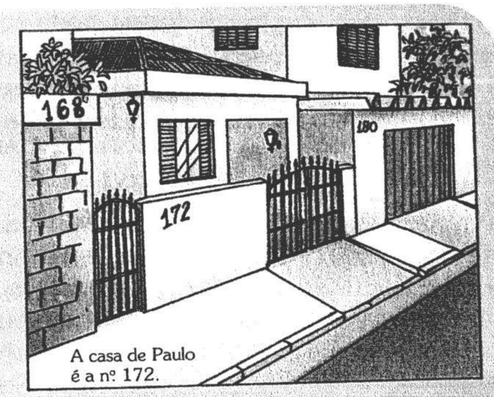
AS FIGURAS E SUAS DIMENSÕES

Quando estamos em uma rua e procuramos a casa de alguém, basta-nos uma única informação para localizá-la: o número. No modelo matemático, esse exemplo caracteriza o que acontece quando queremos localizar um ponto numa reta (ou curva): basta dar a esse ponto uma *abscissa*, que está relacionada com um ponto referencial, a *origem*, ao qual atribuímos a ordenada 0 (zero).

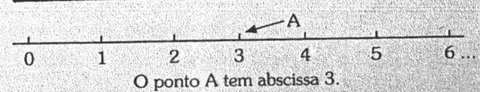
Essa é a propriedade característica das figuras *lineares* ou *unidimensionais*, isto é, que têm uma dimensão.

Quando estamos em um bairro e precisamos chegar a uma casa, já não basta saber apenas seu número. Precisamos saber também em que rua do bairro a casa está localizada. Portanto, já são necessárias *duas* informações. No modelo matemático, teremos a localização de um ponto no *plano*. Para isso, são necessárias duas coordenadas (a *abscissa* e a *ordenada*), geralmente representadas no chamado *plano cartesiano*. O plano cartesiano é formado de dois eixos perpendiculares (ou oblíquos), em cuja interseção está a origem; consideramos como coordenadas da origem o par (0, 0).

Nesse caso, as figuras são *bidimensionais*, ou seja, têm duas dimensões.



A casa de Paulo é a nº 172.

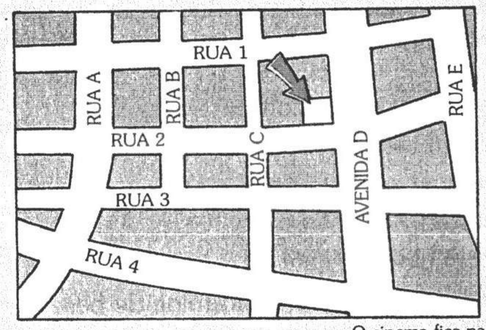


O ponto A tem abscissa 3.

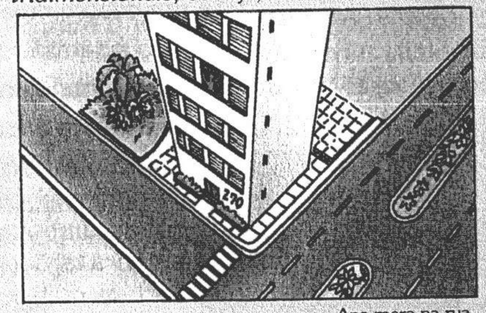
Quando a pessoa que procuramos mora em um apartamento, além de saber a rua e o número do prédio temos de saber também a que altura do prédio (ou seja, o andar) o apartamento está localizado. Nessa situação, precisamos de *três* informações para encontrar a pessoa.

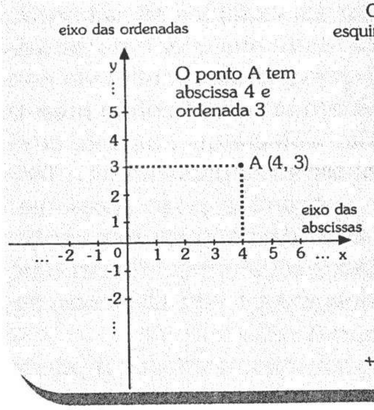
Voltemos ao modelo matemático. Agora estamos querendo localizar um ponto *no espaço* e, para isso, vamos necessitar de três coordenadas (a abscissa, a ordenada e a cota), representadas em um triedro formado por três eixos, em geral perpendiculares entre si e cuja interseção é a origem. As coordenadas da origem são (0, 0, 0).

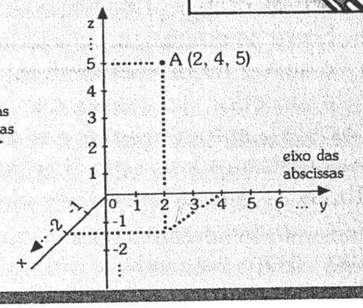
Nesse caso, estamos tratando com figuras *tridimensionais*, ou seja, de três dimensões.



O cinema fica na esquina da avenida D com a rua 2.


Ana mora na rua Chile, nº 270, no 3º andar.



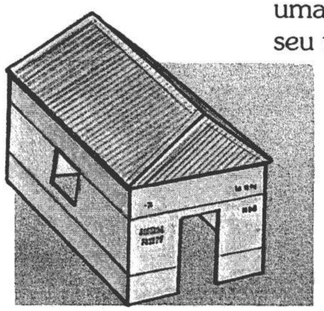


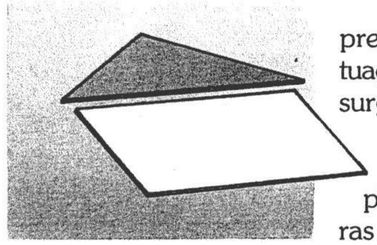
O ponto A tem abscissa - 2, ordenada 4 e cota 5.

A forma pode ser trabalhada em diversas atividades com objetos familiares às crianças e também com modelos de figuras geométricas, conforme as sugestões a seguir.

Atividade inicial

Forme uma coleção com embalagens vazias, fios, bolas, caixas com formas variadas (de acordo com modelos do Anexo 1) e figuras planas (recortadas em papel-cartão, cartolina ou sulfite) quadradas, circulares, triangulares, etc. Com esse material, os alunos devem construir em grupo uma figura ou uma cena — uma casa, digamos. A seguir, cada grupo apresenta e comenta seu trabalho.





Nessa atividade, o professor precisa estar atento para as situações elucidativas que possam surgir. A mesma casinha, por exemplo, é representada por um grupo com figuras planas e por outro com figuras não-planas.

Explorando semelhanças e diferenças entre figuras

Utilizando o mesmo material da atividade anterior, cada grupo de alunos toma dois objetos indicados pelo professor e, depois de examiná-los, faz duas listas: uma indicando as semelhanças e outra apontando as diferenças entre as figuras observadas.

O professor pode sugerir figuras como:

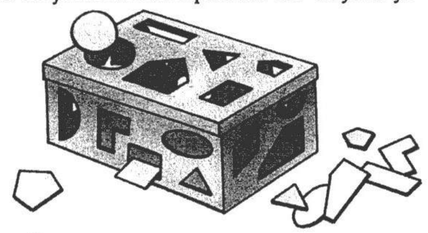
- um cubo e uma pirâmide de base quadrada;
- uma pirâmide qualquer e um cone;
- um prisma e um retângulo;
- uma esfera e um círculo.

Tomando, por exemplo, o cubo e a pirâmide de base quadrada, os alunos poderão observar as seguintes semelhanças, entre outras: ambos podem apoiar-se em qualquer uma de suas faces (embora tal denominação não deva ainda ser utilizada pelo professor); os dois objetos apresentam uma face com a mesma forma. Entre as diferenças, poderão verificar que: o cubo, qualquer que seja o modo de apoiá-lo, sempre apresenta uma face na parte superior, ao passo que a pirâmide pode apresentar uma "ponta"; somente uma das faces da pirâmide tem quatro lados (as restantes possuem três lados cada uma), enquanto no cubo todas as faces têm quatro lados; o cubo tem seis faces, e a pirâmide, apenas cinco.

Numa outra atividade, o professor mostra um dos modelos de sólido geométrico — o cilindro, o cubo, a esfera, etc. — e pede aos alunos que o procurem em sua coleção. A seguir, os alunos deverão encontrar e listar, na classe ou em casa, objetos que tenham a mesma forma da figura apresentada. As listas são comparadas, de modo que as descobertas de um aluno enriqueçam as do outro.

Passa-passa

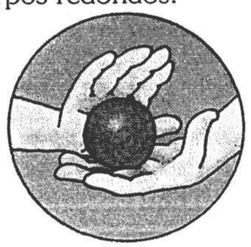
Esse é um jogo que ajuda muito os alunos a perceber os diversos aspectos de um mesmo objeto, conforme o ponto de vista sob o qual é observado. Consiste em uma caixa com diversas janelas por onde os alunos fazem passar um mesmo objeto. Trabalhando em grupo, cada aluno indica uma janela que julga conveniente para passar o objeto que tem nas mãos e depois experimenta para verificar se ela realmente é adequada. Se acertar, ganha um ponto e passa a vez e o objeto ao colega, que faz a mesma coisa ou descobre se as janelas adequadas ao objeto já se esgotaram.

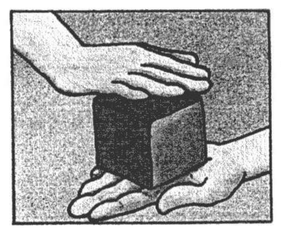


É fácil construir um passa-passa. Nas faces de uma caixa de sapatos, desenhe o contorno de diferentes figuras geométricas e depois recorte-os com um estilete.

Reproduzindo figuras não-planas

A reprodução de figuras não-planas também é um trabalho de grande importância nesse estudo. No caso de crianças de pré-escola até mais ou menos a 2ª série, isso só é possível com massa de modelar ou argila. Por exemplo, os alunos tomam o cubo para reproduzi-lo e logo percebem que ele tem partes bem achatadas. Quando realizam o mesmo trabalho com a esfera, notam que ela é toda arredondada, não tendo partes achatadas. Isso irá ajudá-los a descobrir as diferenças entre os poliedros e os corpos redondos.





Os alunos de 3ª, 4ª ou 5ª séries podem construir modelos dessas figuras a partir de moldes, bem como fazer outros tipos de montagem para elas, como veremos mais adiante na atividade de construção de poliedros.

É importante destacar que estamos trabalhando com *modelos* de figuras geométricas, e não com as próprias, que são abstrações matemáticas, isto é, idealizações do que existe na natureza.

Por exemplo, não existe uma árvore cujo tronco seja exatamente um cilindro, nem laranja que seja exatamente uma esfera.

Assim, o sólido geométrico é uma construção abstrata em que se considera a figura formada pela fronteira e seu interior. Aqui, estamos trabalhando com caixas vazias, portanto apenas com a fronteira, pois não há nada em seu interior que também possa ser considerado "caixa". Uma caixa pode apresentar a *forma* de um paralelepípedo, de um cilindro ou de um cubo, mas não é nenhum desses sólidos, apenas a *representação* deles — tal como uma paisagem pintada em um quadro não é a própria paisagem, mas sua representação.

O mesmo acontece com as figuras planas: uma folha de sulfite apenas *representa* um retângulo. Este, como de resto todos os polígonos, também é uma construção abstrata e não tem espessura: nem a espessura da cartolina, nem a do papel sulfite, nem a do papel de seda.

OS GREGOS E A GEOMETRIA

Sabemos que, muitos séculos antes do florescimento da cultura grega, tanto egípcios quanto babilônios já haviam construído canais de irrigação, aquedutos colossais e pirâmides orientadas pelo Norte verdadeiro (não pelo magnético) com erro inferior a um grau (1º). Cortar imensos blocos de pedra de modo a obter encaixes perfeitos e formar uma pirâmide é trabalho de geômetras de alto nível.

Esses povos, no entanto, nunca tiveram interesse em especular sobre o espaço desocupado. Para eles, não havia forma ou espaço abstrato: as grandezas sempre estavam relacionadas à quantidade de alguma coisa; as unidades de contagem sempre estavam relacionadas à quantidade de sementes a plantar; o espaço imaginado era ocupado por plantações... Coube aos gregos esse grande salto qualitativo; pela primeira vez, o intelecto humano voltava-se para a forma enquanto divorciada das coisas.

Os pensadores gregos dedicaram-se a procurar — e achar — as relações internas das figuras que eles destacavam da natureza. Encontrando intenso prazer intelectual em suas descobertas, chegaram a acreditar que estariam às voltas com seres místicos, com os segredos da formação do cosmo.

No século III a.C., o matemático Euclides dedicou-se à exploração do espaço abstrato, a partir das definições e das relações entre os elementos supostamente necessários à construção das figuras geométricas. Para ele, o ponto, a reta, o ângulo, etc., seriam suficientes para o estudo das formas existentes. Estava inaugurado um verdadeiro método para se explorar o Universo, que seria reproduzido, de modo semelhante, em vários outros campos da ciência. Basta lembrar que, na Academia de Platão, onde se promoviam debates sobre os mais variados temas, lia-se logo à entrada: "Não entre quem não for geômetra".



Euclides, calcografia anônima.

As verdades da geometria de Euclides permaneceram intocadas por cerca de dois mil anos, até que alguém começou a pensar sobre o que aconteceria em situações diferentes daquelas observadas em nossa realidade e sistematizadas por Euclides e seus seguidores. A partir dessa "rebeldia", começaram a surgir novas geometrias — como as chamadas *geometrias não-euclidianas*, dos matemáticos Riemann e Lobachevsky, na primeira metade do século XIX —, e a topologia passou a merecer um estudo teórico.



Nikolai Lobachevsky por Villet, Academia de Ciências de Leningrado.

Pode-se considerar que, com o estudo da geometria, o ser humano tomou consciência do abstrato e inaugurou seu exercício intelectual.

Classificação das figuras geométricas

Após o trabalho inicial de contato com o espaço e a forma dos objetos, o professor pode explorar a classificação das figuras geométricas, de acordo com alguns critérios. Tomando a mesma coleção de objetos utilizada nas atividades de familiarização com a forma, os alunos devem separá-la em duas subcoleções, de tal modo que cada peça só possa fazer parte de uma única subcoleção (lembre-se do trabalho realizado com a classificação). Para isso, podem usar o critério que desejarem. Em geral, fazem a separação pela cor, pela presença ou não de palavras escritas, pelo material de que são feitas, e até por aspectos bem subjetivos, como "as bonitas" e "as feias".

Depois que as separações forem apresentadas e discutidas, os alunos podem dedicar-se à classificação que nos interessa teoricamente, ou seja, das figuras planas e não-planas.

Pede-se aos alunos que escolham, em sua coleção, uma bola e um disco de cartolina (ou um cubo e um quadrado, etc.). Eles devem observar o que há de semelhante e de diferente entre as duas peças. A seguir, colocam em uma coleção todas as figuras do "mesmo tipo" do disco e, na outra, as que são do mesmo tipo da bola.

Na apresentação do trabalho pelos alunos, certamente vários grupos terão separado as figuras planas e as não-planas. O professor aproveita a oportunidade para falar desses nomes, enfatizando a propriedade que lhes é característica.

Figura plana *é aquela em que todos os pontos se apóiam sobre a superfície em que repousa. Por exemplo, uma folha de sulfite sobre o tampo da mesa.*

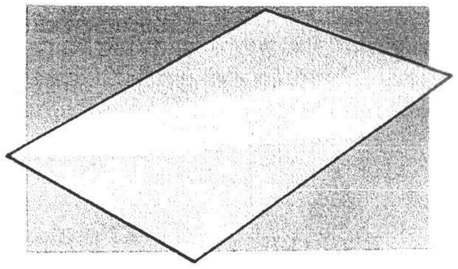


Figura não-plana *é aquela em que parte dos pontos se apóia na superfície e parte não, ficando fora dela. Por exemplo, uma lata de biscoitos sobre a mesa.*



Tendo separado as figuras geométricas em planas e não-planas, continuaremos nossa classificação a partir dessas duas grandes categorias, a começar pelas figuras não-planas.

I. Figuras não-planas

A primeira etapa na classificação das figuras não-planas será separar os poliedros dos corpos redondos. Esse trabalho pode ser realizado com alunos de 3ª série.

Mais uma vez, eles separam as peças como quiserem. Após a discussão do que foi feito, o professor pede-lhes que peguem a esfera e o cubo (ou a bola e o dado, ou o nome que tiverem escolhido para essas peças).

Agora, devem colocar em uma coleção todas as peças semelhantes ao cubo e, em outra, as semelhantes à esfera. Nessa atividade, os alunos utilizam bastante o tato: "Esta peça é lisinha, fácil de segurar; esta outra tem pontas, 'cutuca' a mão!".

Feita a discussão da atividade, o professor escolhe a solução em que uma das coleções contenha cones, cilindros e esferas e, a outra, sólidos em que todas as faces são planas. Destaca, então, que a primeira coleção contém *corpos redondos*, ou seja, que podem rolar quando empurrados em uma superfície plana.



Quanto à segunda coleção, o professor chama a atenção para o fato de que as figuras permanecem sempre em equilíbrio quando deixadas sobre uma superfície plana, pois todas as suas *faces* (ou modos de apoiar-se) são planas. Essas figuras chamam-se *poliedros* (do grego *poli*, muitas, e *edro*, faces).



O professor pode pedir que os alunos experimentem colocar sobre uma superfície plana, de todos os modos que conseguirem, cada um dos poliedros, observando que eles não rolam quando empurrados.

Os poliedros

Trabalhando agora apenas com poliedros, o professor pode propor inúmeras atividades, como veremos a seguir.

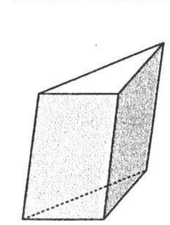
Separando prismas, pirâmides e outros poliedros

Primeiro, os alunos separam os objetos em subcoleções, conforme o grupo desejar. Depois, cada grupo examina o arranjo feito pelos outros, tentando descobrir o critério usado na arrumação.

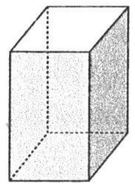
Ao discutir os resultados obtidos, pode ser que não surja a separação que o professor pretendia. Nesse caso, pede-se aos alunos que juntem novamente as peças e procurem outros modos de arrumação, até que ocorra a classificação esperada: prismas, pirâmides e outros poliedros.

No grupo dos *prismas* estarão os poliedros caracterizados por ter na maioria das faces (e às vezes em todas) polígonos de quatro lados; as faces opostas são iguais.

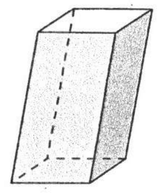
Os prismas podem ser classificados ainda em *retos* e *oblíquos*, de acordo com os ângulos de suas faces, mas não há necessidade de apresentar esses pormenores para alunos das séries iniciais.



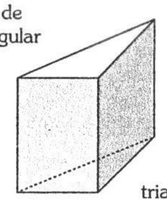
prisma oblíquo de base triangular



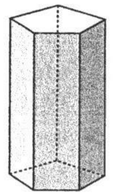
prisma reto de base quadrada



prisma oblíquo de base quadrada

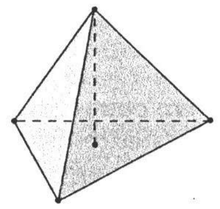


prisma triangular reto

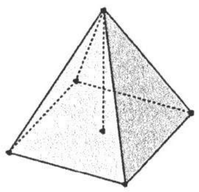


prisma reto de base pentagonal

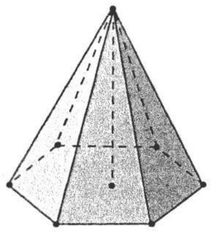
No grupo das *pirâmides*, encontram-se todos os poliedros cujas faces laterais — e, no caso da pirâmide triangular, também a face de apoio — são triangulares. Observe, nas pirâmides abaixo, que as faces laterais convergem e se encontram em um único ponto.



pirâmide reta de base triangular



pirâmide reta de base quadrada



pirâmide reta de base hexagonal

Surge, ainda, uma subcoleção de poliedros que não se caracterizam nem como prismas nem como pirâmides, sendo designados simplesmente pelo número de faces que possuem. É o caso, por exemplo, do octaedro, do dodecaedro e do icosaedro. (veja as figuras, na p. 242).

Alguns poliedros e seus nomes*

tetraedro	4 faces	**octa**edro	8 faces
pentaedro	5 faces	**deca**edro	10 faces
hexaedro	6 faces	**dodeca**edro	12 faces
heptaedro	7 faces	**icosa**edro	20 faces

* O prefixo destacado em cada nome refere-se ao número de faces do poliedro. Os demais poliedros, em geral, são indicados nomeando-se o total de suas faces. Por exemplo: "poliedro de 11 faces".

Identificando os elementos fundamentais do poliedro

Encerrada a etapa de contato e trabalho com as faces dos poliedros, os alunos de 3ª ou 4ª série podem agora conhecer suas arestas e vértices. Uma das maneiras é pedir que examinem um poliedro qualquer, como um prisma de base quadrada, e procurem nele duas faces que não se encontram e duas que se encontram.

Depois, os alunos podem observar como se dá o encontro das duas faces indicadas. Verificam que isso ocorre por meio de uma espécie de dobra, e passam o dedo sobre ela para senti-la. O professor explica que essa "dobra" é uma *aresta* do poliedro.

faces

arestas

A seguir, pede que procurem outras arestas do prisma e, finalmente, que contem quantas arestas são ao todo.

A mesma experiência pode ser feita com outros poliedros. Pode-se organizar uma tabela para que os alunos façam os registros:

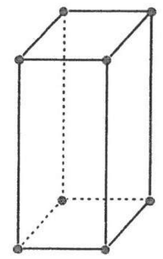
Poliedro	Total de faces	Total de arestas
Prisma de base quadrada	6	12
Prisma de base triangular		
Cubo (hexaedro regular)		
Octaedro regular		
Pirâmide de base pentagonal		

Depois do levantamento de faces e arestas de alguns dos poliedros, pode-se sugerir aos alunos que retomem o prisma de base quadrada, para nova experiência: procurar, agora, duas arestas que não se encontram e duas que se encontram.

A seguir, os alunos examinam como é o encontro das duas arestas. Verificam de imediato que o encontro ocorre num ponto. O professor explica que esse ponto é denominado *vértice.*

Os alunos fazem a contagem do total de vértices do prisma em questão e dos demais poliedros escolhidos. Em seguida, continuam preenchendo a tabela.

Poliedro	Total de faces	Total de arestas	Total de vértices
Prisma de base quadrada	6	12	8
Prisma de base triangular			
Cubo			
•			
•			
•			



Pela análise da tabela, é possível descobrir que, para todos os poliedros examinados, há uma relação entre os seus elementos: o número de faces, somado ao número de vértices, é igual ao número de arestas mais 2.

$$F + V = A + 2$$

Essa é a *relação de Euler,* assim chamada em homenagem ao matemático que a descobriu.

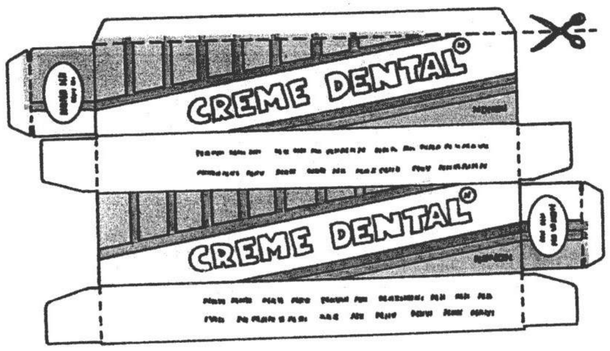
O professor pode ainda sugerir aos alunos que peguem um cubo, em sua coleção de caixinhas, e o examinem para descobrir quantas faces se encontram em cada uma das arestas e quantas arestas se encontram em cada um dos vértices. Os dados podem ser anotados em uma tabela.

A seguir os alunos pegam outro poliedro de sua coleção — a pirâmide de base quadrada, por exemplo — e fazem toda a experiência novamente, verificando se as observações feitas são as mesmas do caso do cubo.

Construindo poliedros

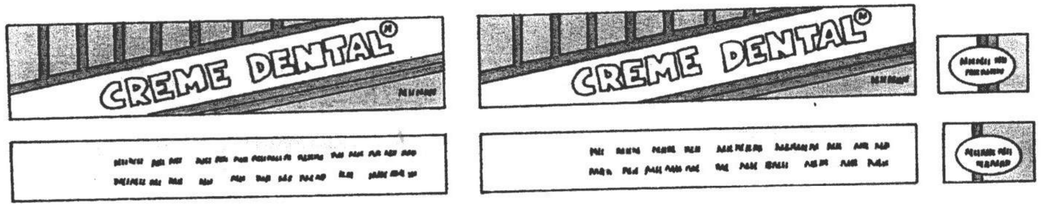
Como vimos, da pré-escola até a 2ª série as crianças só têm habilidade para reproduzir os sólidos geométricos com argila ou massa de modelar. A partir da 3ª série, porém, os alunos já possuem coordenação motora suficiente para reproduzi-los com moldes fornecidos pelo professor.

Para que compreendam bem o funcionamento do molde, é importante que iniciem o trabalho desmontando uma caixa — de creme dental, por exemplo.

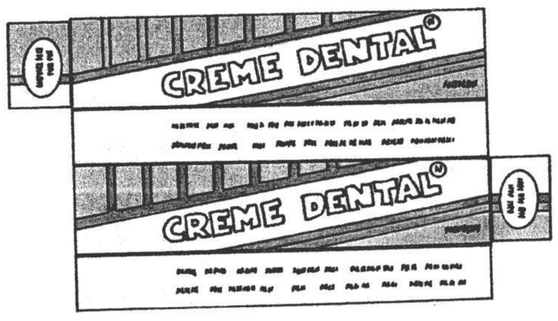


A atividade pode começar com a observação e classificação da caixa: é figura plana? É prisma? É pirâmide? Em seguida, os alunos contam seus elementos: faces, vértices, arestas. Só então tem início a tarefa de desmanchar a caixa, eliminando as lingüetas, que são desnecessárias.

Assim, os alunos obtêm o molde da caixa. Devem agora cortar e separar as seis faces.



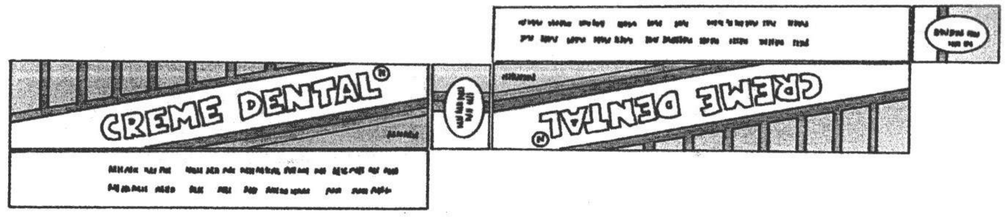
Pode-se sugerir que os grupos realizem o seguinte jogo: um aluno de cada vez arruma as seis faces sobre a mesa, de modo que, com fita adesiva, se possa obter novamente a caixa original aberta.



Não é permitido ao jogador levantar nenhuma face para experimentar: ele só pode imaginar como ficarão quando coladas. E não vale repetir uma solução que já tiver surgido.

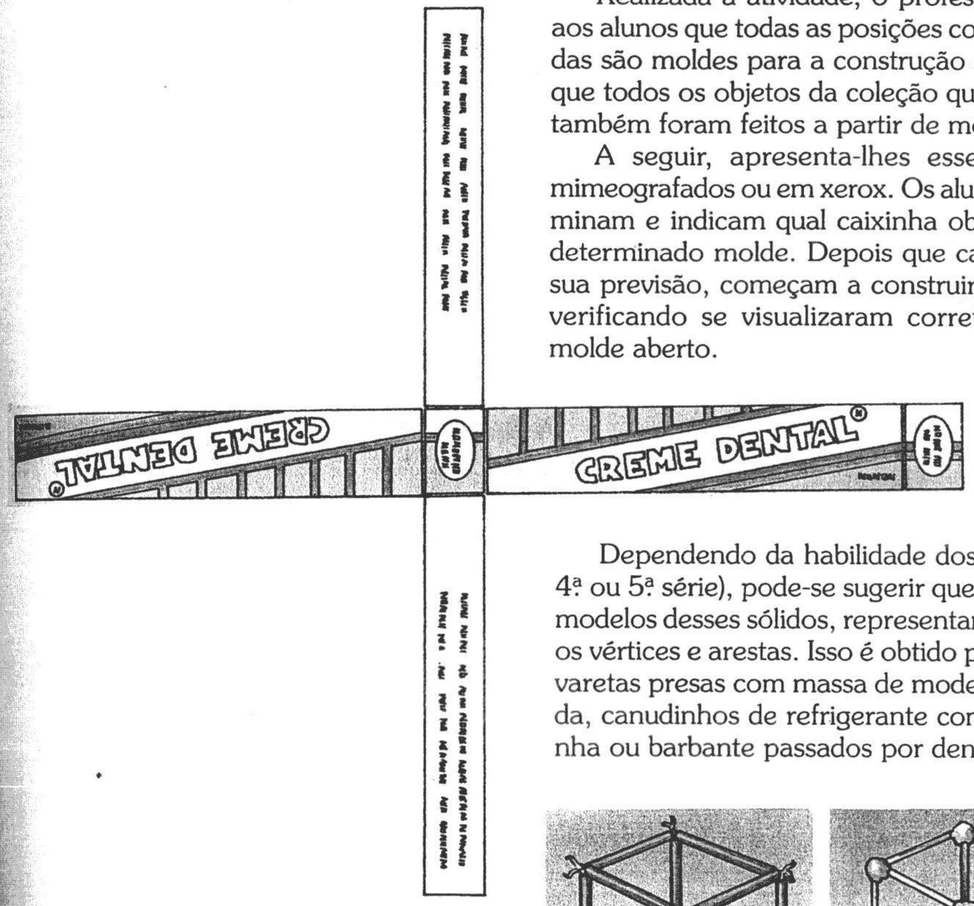
A primeira solução será, claro, a clássica, pois foi a que os alunos viram quando estavam desmanchando a caixa:

A solução seguinte demora um pouco a aparecer, pois, presos à primeira, os alunos não conseguem acreditar que haja outras. No entanto, no momento em que surge uma nova disposição das peças, muitas outras se seguem.

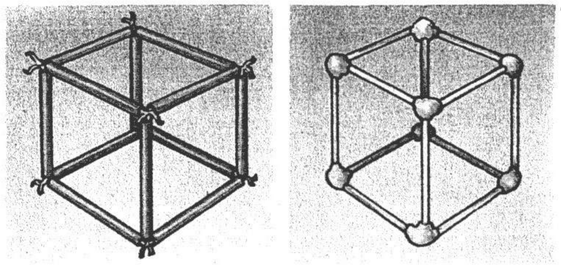


Realizada a atividade, o professor explica aos alunos que todas as posições corretas obtidas são moldes para a construção da caixa, e que todos os objetos da coleção que possuem também foram feitos a partir de moldes.

A seguir, apresenta-lhes esses moldes, mimeografados ou em xerox. Os alunos os examinam e indicam qual caixinha obterão com determinado molde. Depois que cada um fez sua previsão, começam a construir as caixas, verificando se visualizaram corretamente o molde aberto.



Dependendo da habilidade dos alunos (de 4ª ou 5ª série), pode-se sugerir que construam modelos desses sólidos, representando apenas os vértices e arestas. Isso é obtido por meio de varetas presas com massa de modelar ou, ainda, canudinhos de refrigerante com fios de linha ou barbante passados por dentro.



Essas atividades de construção permitem aos alunos perceber as características de cada um dos poliedros: como são suas faces; que relação existe entre as faces opostas; quantas arestas tem cada face; que ângulo se forma entre as arestas; se há ou não necessidade de que as arestas sejam todas iguais; etc.

Reconhecendo os poliedros regulares

O octaedro, o icosaedro e o dodecaedro, cujos moldes estão no Anexo 1, têm uma característica especial, que pode ser trabalhada já na 3ª série.

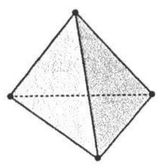
O professor pode sugerir, por exemplo, a seguinte experiência: "Separem o cubo e a pirâmide de base quadrada, colocando cada um deles em todas as posições possíveis. Observem que aspecto esses poliedros apresentam em cada posição".

Os alunos observam que o aspecto do cubo não se modifica, mas o da pirâmide sim. Em seguida, o professor pede que examinem os dois sólidos e descubram uma explicação para isso. A maioria percebe rapidamente que o cubo tem todas as faces iguais, mas a pirâmide de base quadrada não. Assim, conforme a face sobre a qual a pirâmide está apoiada, ela apresenta um aspecto diferente.

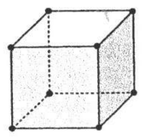
O passo seguinte é pedir aos alunos que procurem, na coleção, outras peças com a mesma propriedade do cubo. Aos poucos, vão sendo selecionados o tetraedro (pirâmide triangular regular), o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.

O professor explica, então, que os poliedros da coleção que têm todas as faces iguais são chamados de *regulares*. Pode aproveitar também para informar os nomes desses poliedros, que, como vimos no quadro da p. 238, têm relação com o número de faces que possuem.

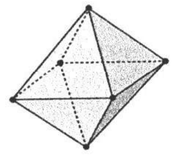
Naturalmente, não se deve exigir que os alunos decorem esses nomes.



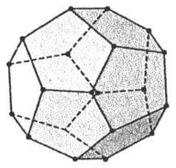
tetraedro regular



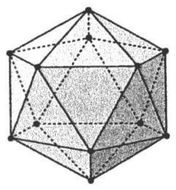
hexaedro regular (cubo)



octaedro regular

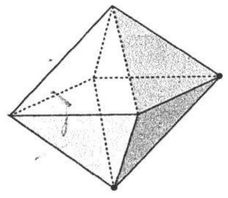


dodecaedro regular

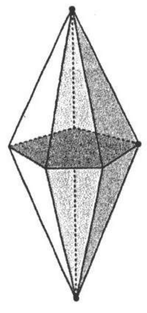


icosaedro regular

É importante observar que nem todo poliedro com faces congruentes é regular, pois para isso é necessário também que de cada vértice do poliedro saia o mesmo número de arestas. Veja os exemplos:



O octaedro é regular porque, além das faces congruentes, saem 4 arestas de cada um dos seus vértices.



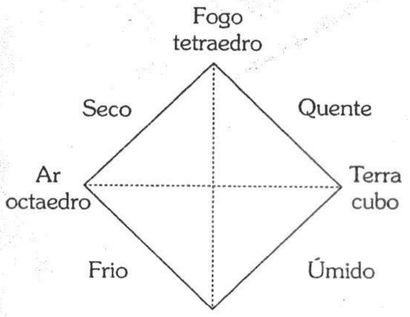
Este decaedro tem as dez faces congruentes mas não é regular, pois há vértices com quatro arestas e outros com cinco. Apoiado de diferentes modos, apresentará diferentes aspectos.

Uma visão Histórica

Os cinco poliedros regulares — tetraedro, hexaedro (cubo), octaedro, dodecaedro e icosaedro — já eram conhecidos no século IV a.C.

Carl Boyer, em sua *História da matemática*, conta-nos que, provavelmente, o filósofo grego Platão tomou conhecimento desses poliedros quando visitava seu amigo Arquitas, na Sicília, em 388 a.C.

O tetraedro, o cubo, o octaedro e o icosaedro eram associados aos quatro elementos formadores do universo conhecido — terra, fogo, ar e água — em um esquema que fascinou os homens durante séculos:



Imagina-se que a veneração dos pitagóricos pelo dodecaedro levou Platão a considerá-lo como o quinto elemento do esquema, simbolizando o Universo.

Um jovem amigo de Platão, Teaetetus (414-369 a.C.), foi o primeiro a escrever sobre os cinco poliedros regulares — que ficaram conhecidos como *poliedros de Platão* —, provando que apenas esses cinco são regulares.

Platão teve enorme influência sobre o desenvolvimento da matemática em seu tempo. Sua academia, em Atenas, tornou-se o centro do mundo matemático. Dela saíram os principais mestres e pesquisadores do século IV a.C., que nos legaram esses e muitos outros conhecimentos.



Museu do Vaticano, Vaticano.

Aristóteles e Platão retratados por Rafael em *Escola de Atenas*. A Academia de Platão, em Atenas, foi o grande centro de convergência dos matemáticos gregos do século IV a.C.

II. Figuras Planas

Ao desfazerem as caixas, na atividade de construção de poliedros, os alunos já terão iniciado o trabalho com figuras planas.

Pode-se agora pedir aos alunos que coloquem cada poliedro sobre uma folha de papel, virando-o em todas as posições possíveis para desenhar o contorno de suas faces. Com isso, obtêm-se figuras cujos elementos encontram-se todos sobre o plano do papel — são as figuras planas.

A seguir, os alunos examinam as figuras obtidas e discutem: são todas iguais? Que formas têm? Quantos lados tem cada uma? Há diferenças de dimensões?

Os polígonos

Com os alunos de 3ª série, já é possível realizar atividades que levem ao conceito de polígono.

As atividades a seguir têm por objetivo levar os alunos a descobrir, eles mesmos, as principais propriedades que definem os polígonos.

Reconhecendo os polígonos

O professor apresenta cópias de todas as figuras do Anexo 4 para os alunos colorirem com lápis de tons claros e depois recortarem. A seguir, a turma forma grupos para classificar as figuras de acordo com seus próprios critérios. Depois, os grupos trocam de lugar, de modo que cada um possa analisar o trabalho feito pelo outro, tentando descobrir o critério utilizado para organizar as diversas subcoleções apresentadas. Ao término do trabalho, a classe toda discute o que foi feito.

Nessa discussão, costumam aparecer várias características das figuras, observadas pelos grupos: abertas ou fechadas; têm lados retos ou não; os lados se cruzam ou não; têm reentrâncias ou não.

Também as figuras do Anexo 5 podem ser utilizadas para atividades iniciais com polígonos.

O aluno analisa as figuras de cada coluna indicada por uma seta e assinala aquela que ele julga não pertencer ao grupo das demais, anotando as diferenças que ela apresenta em relação às outras. A seguir, forma a classe das figuras que foram assinaladas, observando agora suas semelhanças: são fechadas, planas, têm lados retos, os lados não se cruzam.

O professor então diz à classe que as figuras com essas características chamam-se *polígonos*.

O polígono é uma construção abstrata (tal como o poliedro), definida como "uma curva plana, fechada, simples, formada por segmentos consecutivos e não-colineares"; portanto, trata-se apenas da fronteira, não se incluindo seu interior.

O que usamos em nossas aulas são *modelos* de polígonos, que, recortados em papel, representam regiões. Por facilidade de linguagem, costuma-se estender o nome do polígono à região por ele limitada. Assim, por exemplo, quando recortamos em papel uma *região triangular*, costumamos chamá-la de *triângulo*.

Os alunos examinam de novo os contornos dos poliedros feitos anteriormente e verificam que todas as suas faces são polígonos.

Reproduzindo polígonos

Usando pedaços de canudinho de refrigerante colocados em fios ou barbantes, ou varetas ligadas por massa de modelar, os alunos construirão polígonos com qualquer quantidade de lados (o professor pode aproveitar o momento para discutir a quantidade mínima de lados necessários para formar um polígono). Os lados poderão ser todos do mesmo tamanho ou de tamanhos variados.

Pode-se também desenhar os polígonos, com o auxílio de régua, esquadro e compasso.

Os alunos perceberão que dois dos lados de um polígono sempre se encontram em um ponto, que é chamado *vértice* do polígono. A professora pode propor então a seguinte discussão: existe relação entre o total de lados e o total de vértices de um polígono?

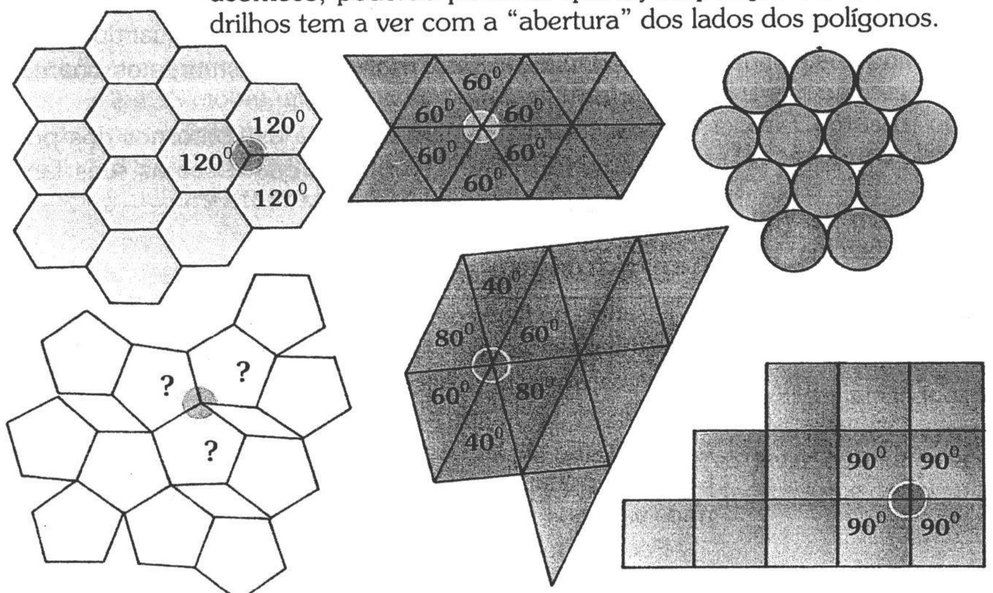
Introduzindo o conceito de ângulo

Pede-se aos alunos que reproduzam doze vezes a figura tirada do contorno de uma das faces do cubo. A seguir, eles decoram as novas figuras como se fossem ladrilhos e formam um painel, obedecendo à seguinte condição: não deve haver sobreposição de ladrilhos nem espaços vazios entre eles.

Em seguida, a classe realiza a mesma atividade usando os contornos da pirâmide de base hexagonal, do prisma de base pentagonal, do cone e do prisma de base triangular (na coleção do Anexo 1 há dois desses prismas, um com triângulo equilátero e outro com triângulo escaleno).

Ao realizar as construções, os alunos farão algumas descobertas. Conforme a figura com que se trabalha, não dá para evitar espaços vazios entre os azulejos. Com hexágonos, assim como com triângulos equiláteros, não há dificuldade; já com pentágonos e círculos, é impossível, pois, para que não haja espaços vazios nem sobreposição em torno de um mesmo ponto, é necessário que a soma dos ângulos que ficam consecutivos no ladrilhamento seja 360°.

É claro que os alunos não sabem disso, nem é ainda o momento de dizer-lhes, mas, analisando cada caso em que isso acontece, poderão perceber que a justaposição ou não dos ladrilhos tem a ver com a "abertura" dos lados dos polígonos.

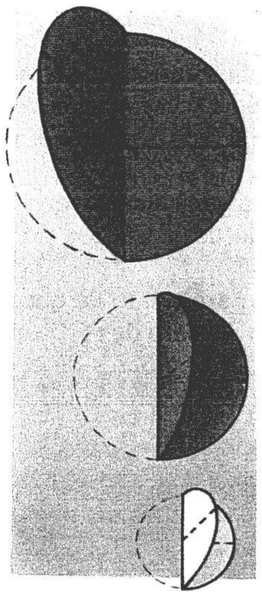


Esse é o momento adequado para introduzir o conceito de ângulo como *mudança de direção*. Para isso, o professor pode retomar a realização de percursos e propor uma análise das mudanças de direção que ocorrem em cada trajeto.

Outras atividades que trabalham esse conceito:

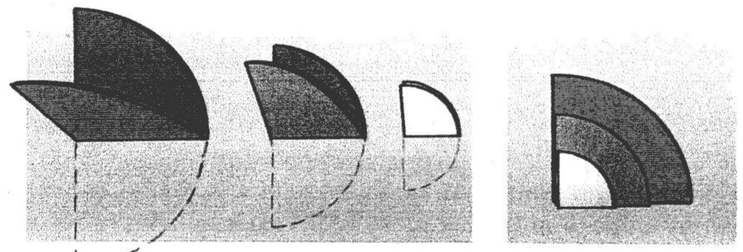
- visualização e reprodução das posições relativas dos ponteiros do relógio, em vários momentos da aula;
- observação das várias posições da porta da classe, desde fechada até totalmente aberta (os alunos podem marcar essas posições com giz no chão, relacionando-as com a posição inicial, fechada);
- manuseio dos sólidos geométricos — acompanhando com o dedo as várias arestas de um poliedro, a criança percebe a mudança de direção, ao passar de uma para a outra; saindo de um ponto da base de um cone ou cilindro e percorrendo seu contorno até voltar ao ponto inicial, dá-se uma "volta completa";
- seguir com o dedo o contorno de uma figura plana qualquer — acompanhando o contorno de um disco de cartolina dobrado ao meio, dá-se meia volta.





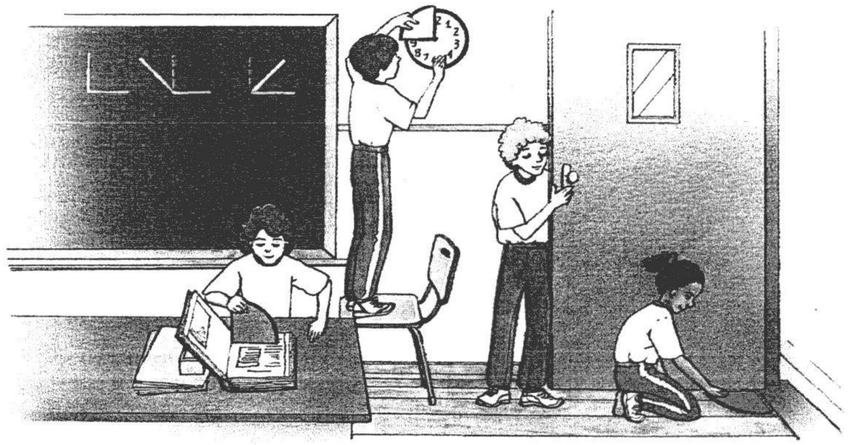
Nesse ponto, já é possível introduzir o conceito de ângulo reto de modo experimental, mesmo que ainda não se tenha tratado de medidas de ângulos.

Pode-se sugerir aos alunos que construam com o compasso três círculos de raios diferentes. Recortando-os, terão três discos. Em seguida, dobram cada um deles ao meio duas vezes, obtendo uma figura com uma parte arredondada e outra reta, como um "canto". Sobrepondo-se esses "cantos", percebe-se que eles coincidem, embora os discos tenham tamanhos diferentes.



Cada canto recebe o nome de *ângulo reto*. Agora, pede-se aos alunos que, usando um desses cantos como referência, procurem na classe e em seus materiais escolares outros ângulos retos. Podem, por exemplo, verificar no relógio em que momentos do dia os ponteiros formam ângulo reto ou, ainda, colocar a porta da classe na posição que forma ângulo reto com a marca de giz que indicava a porta fechada.

A seguir, devem procurar ângulos que são *maiores* ou *menores* que o ângulo reto — e que já podem ser designados corretamente de ângulos *obtusos* e *agudos*.



Voltando agora à atividade de ladrilhamento, os alunos deverão comparar a "abertura" entre dois lados de cada um dos polígonos, novamente usando como referência um ângulo reto. O professor explica que essa abertura é chamada de *ângulo do polígono*.

Classificando os polígonos

Uma vez que os alunos estejam familiarizados com os polígonos, pode-se iniciar a classificação geral. O professor pede que escolham todos os polígonos do Anexo 4 e os separem em classes.

Diversas separações podem surgir, mas alguns alunos certamente farão a classificação pela quantidade de lados dos polígonos.

O professor chama a atenção da classe para o fato de que, nos polígonos, o número de lados é igual ao número de vértices e de ângulos internos, e aproveita para dizer os nomes de alguns deles, lembrando que têm relação com o número de lados (ou de ângulos) da figura.

Alguns polígonos* e seus nomes

triângulo	3 lados
quadrilátero	4 lados
pentágono	5 lados
hexágono	6 lados
heptágono	7 lados
octógono	8 lados
eneágono	9 lados
decágono	10 lados
undecágono	11 lados
dodecágono	12 lados
pentadecágono	15 lados
icoságono	20 lados

* Do grego *poli*, "muitos" e *gonos*, "ângulos."
Os demais polígonos são denominados simplesmente pelo número de seus lados; por exemplo, "polígono de treze lados".

Uma atividade que os alunos podem realizar agora é procurar objetos de seu cotidiano que tenham a forma de algum desses polígonos.

Os quadriláteros

Após identificar os polígonos em geral, os alunos de 3ª série já podem trabalhar apenas com quadriláteros. O objetivo, nesse momento, é a classificação dos quadriláteros, que pode ser feita de diversas maneiras, segundo o critério utilizado.

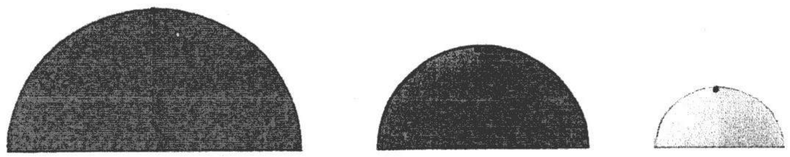
Vamos trabalhar aqui com os seguintes critérios:

- paralelismo dos lados;
- existência ou não de ângulos retos no polígono;
- existência ou não de lados com a mesma medida.

As retas paralelas e os paralelogramos

O trabalho pode ser iniciado pela construção de um feixe de retas paralelas.

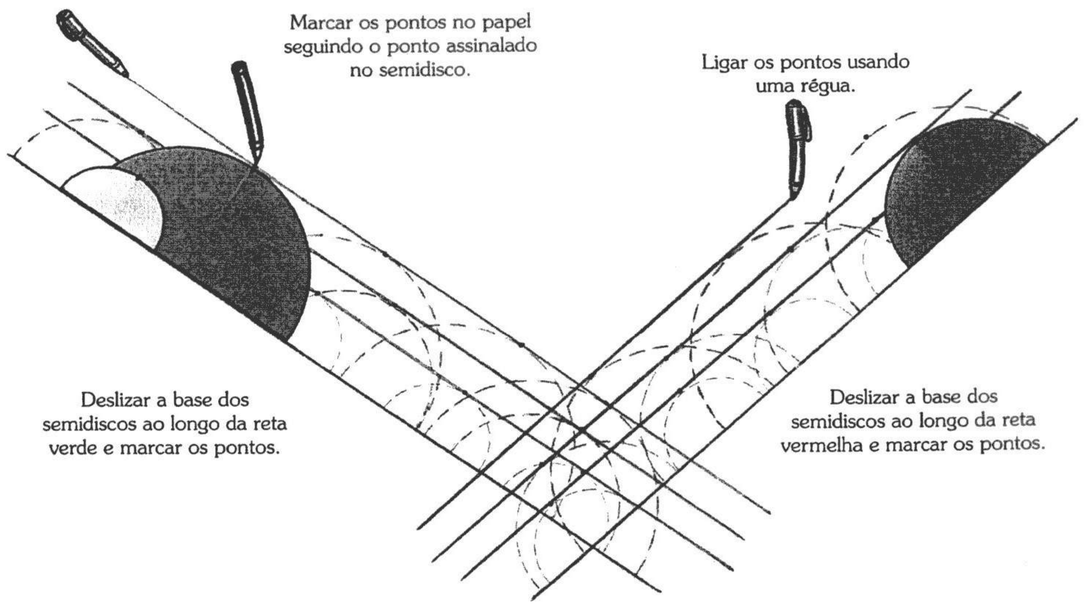
Utilizando os mesmos discos empregados na atividade sobre ângulos retos, os alunos novamente devem dobrá-los ao meio duas vezes, vincando bem a dobra. Desdobrando uma vez, terão semidiscos em cuja parte arredondada o vinco da dobra terá determinado um ponto. Esse ponto será marcado com caneta.



Em uma folha de sulfite traçam-se duas retas em posições e cores diferentes (por exemplo, uma vermelha e outra verde), que se cruzem.

Mais uma vez, deve ficar claro que estamos lidando com uma representação da reta, já que esta é uma construção mental, sem existência concreta. Trata-se de uma figura de comprimento infinito e que não tem espessura (nem sequer a espessura de um fio de teia de aranha).

Deslizando a base de um dos semidiscos ao longo da reta vermelha, os alunos irão marcando pontos nos locais em que forem situando o ponto assinalado no semidisco. A seguir, usam régua e caneta vermelha para ligar os pontos obtidos.



Repetem a operação com os outros dois semidiscos, na mesma reta, e obtêm três retas (vermelhas) que não se cruzam. Na outra reta deverão fazer o mesmo, obtendo três novas retas (verdes), que também não se cruzam.

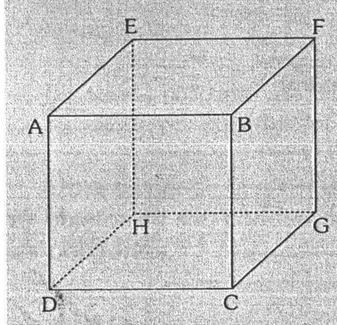
Ao prolongar as retas verdes e vermelhas, os alunos irão observar que as de cores diferentes se cruzam. O professor informará que as três retas vermelhas são *paralelas*, bem como as três retas verdes, pois estão no mesmo plano (do papel) e não se cruzam. Uma reta vermelha e uma verde não são paralelas, pois se cruzam, sendo por isso denominadas *retas concorrentes*. É possível que, no limitado espaço do papel, alguma reta verde não esteja cruzando uma vermelha; porém, se o aluno acompanhar com a régua o prolongamento de uma e de outra, verá que elas se encontram em algum ponto fora do papel.

Depois que entenderam o que são duas ou mais retas paralelas, os alunos procuram exemplos concretos na sala de aula, em seu material escolar, nas ruas do bairro, etc.

Também já podem examinar os prismas de sua coleção, verificando as arestas que são paralelas e as que não são. O mesmo deve ser feito com outros poliedros, como a pirâmide de base quadrada e a de base hexagonal regular.

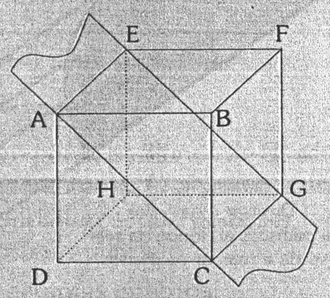
LEMBRE-SE

Em um prisma encontram-se arestas paralelas, arestas concorrentes e arestas reversas, isto é, que não se cruzam mas não são paralelas. Veja a ilustração a seguir:



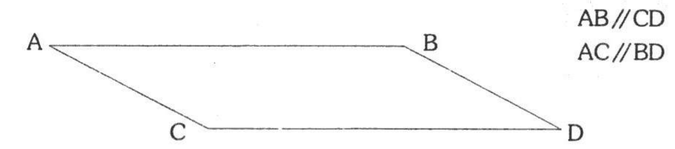
Nesse prisma, as retas determinadas pelos pontos A e E, G e F não se cruzam e não são paralelas, pois não estão em um mesmo plano (nenhuma face do prisma contém simultaneamente as duas arestas, nem é possível imaginar um plano que passe pelas duas).

As retas determinadas pelos pontos A e E, C e G são paralelas. Mesmo não havendo no prisma uma face que contenha as retas $\overline{AE}$ e $\overline{CG}$, é possível imaginar um plano passando por elas: o plano definido pelos pontos A, E, C e G.



Observe a sala onde você se encontra. Existem nela exemplos de retas paralelas? E de retas reversas?

Em seguida, pede-se aos alunos que trabalhem com os quadriláteros. A atividade consiste em marcar, do modo que preferirem, cada par de lados paralelos que encontrarem na figura. Exemplo:

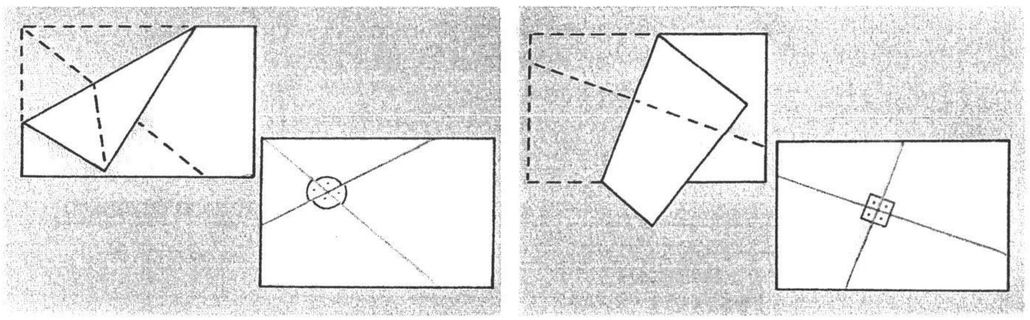


Durante a atividade, os alunos irão descobrir que há quadriláteros com *dois pares* de lados paralelos, outros com *apenas um par* de lados paralelos, e outros ainda que não possuem lados paralelos. O professor aproveita então para explicar que os primeiros são conhecidos como *paralelogramos*, os segundos, como *trapézios*, e os terceiros simplesmente como *quadriláteros*.

É importante observar que alguns autores definem o trapézio como um quadrilátero que tem um par de lados paralelos (e não *apenas um par*, como empregamos aqui). Segundo essa definição, o paralelogramo faria parte do grupo dos trapézios.

Ângulos retos e retângulos

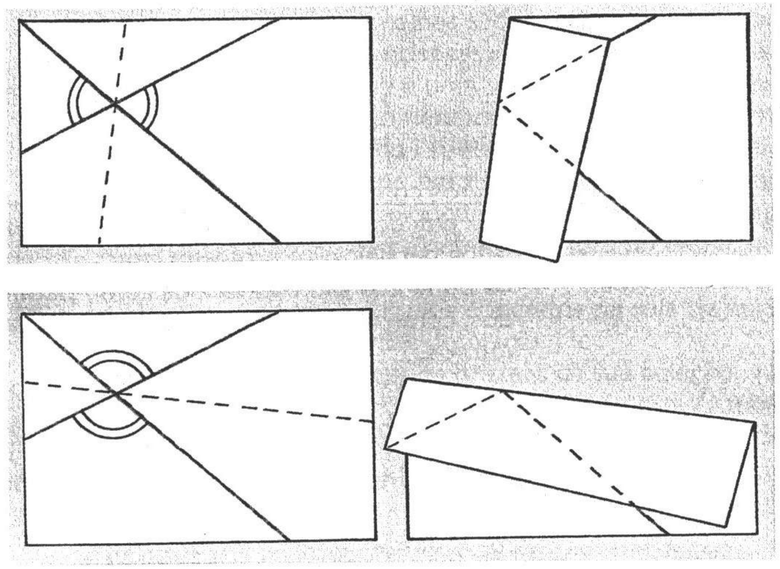
O professor sugere agora que os alunos dobrem duas vezes uma folha de papel, do modo que quiserem. Em seguida, assinalam as dobras feitas com uma régua e observam as duas situações que surgem:



Ao analisar as retas que se cruzam no papel, os alunos verão que elas sempre formam quatro ângulos. Comparando esses ângulos com o modelo de ângulo reto, descobrem que há duas possibilidades:

- os quatro ângulos são retos (nesse caso, as retas são chamadas de *perpendiculares*);
- há dois ângulos agudos e dois obtusos (nesse caso, as retas são chamadas de *oblíquas*).

A seguir, os alunos vincam bem as dobras feitas e fazem um dos ângulos agudos recair sobre o outro, com uma dobra adequada da folha. Desse modo, verificam que esses dois ângulos agudos são iguais, ou seja, seus lados coincidem. O mesmo pode ser feito com os ângulos obtusos.



A partir do conceito de ângulo reto, o professor pode avançar para uma nova classificação dos quadriláteros, usando novamente os polígonos do Anexo 4.

Utilizando mais uma vez o modelo de ângulo reto, os alunos comparam todos os ângulos de cada um desses quadriláteros, colorindo aqueles que forem retos. A seguir, separam os quadriláteros que têm os quatro ângulos retos (os retângulos) dos demais (os não-retângulos).

Essa nova classificação pode ser relacionada com a anterior, a partir de um diagrama que os próprios alunos montam:

	Paralelogramos	Trapézios	Outros
Retângulos			
Não-retângulos			

Nesse diagrama — batizado de *diagrama de Carroll* em homenagem ao matemático inglês Lewis Carrol (1838-1898), autor da famosa obra infantil *Alice no país das maravilhas* — , serão colocados todos os quadriláteros do Anexo 4. O professor pede aos alunos que observem onde se localizam os retângulos, e eles então verificam que *todos* os retângulos são paralelogramos.

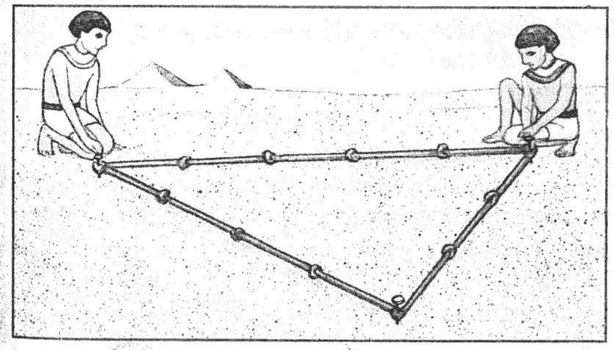
Ângulo reto e Antigüidade

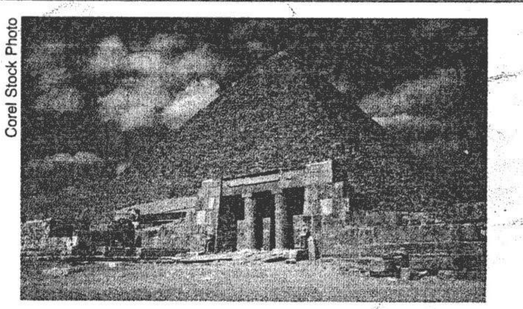
Observando fotos das pirâmides do Egito, vemos que elas têm base quadrada. Isso significa que os ângulos entre as arestas da base são retos. Como se sabe, os lados do quadrado-base das pirâmides são muito grandes. Ficamos então imaginando como os egípcios conseguiam medir esses ângulos com tanta perfeição.

Segundo Carl Boyer, havia naquele tempo uma classe de "técnicos" em medição, que eram chamados de *estiradores de corda* (os agrimensores):

Sua técnica consistia em usar uma corda, com treze nós eqüidistantes, que eles manipulavam do seguinte modo:

- prendiam o primeiro nó com uma estaca, no chão; estirando a corda e contando três espaços entre os nós, prendiam o quarto nó com outra estaca;
- a partir daí, estiravam novamente a corda e o especialista nessas medições indicava mais ou menos onde deveria ser preso o oitavo nó, usando nova estaca;
- a operação seguinte era conseguir que o décimo terceiro nó coincidisse com o primeiro, o que exigia algumas leves alterações na localização do oitavo nó (colocado por "golpe de vista").





Corel Stock Photo

Pirâmide de Quéops: cada lado mede 230 m.

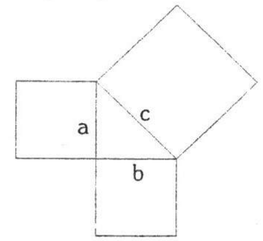
Formava-se assim um triângulo retângulo cujos lados mediam, por assim dizer, 3 espaços, 4 espaços e 5 espaços; o vértice do ângulo reto localizava-se na segunda estaca.

Mas os egípcios não chegaram a formular nenhuma justificativa teórica para seu procedimento de medição. Foram os gregos que, muito mais tarde, explicaram que os egípcios, ao construir seu triângulo, conseguiam estabelecer uma relação entre as medidas dos lados, tal que a soma dos quadrados das duas menores era igual ao quadrado da medida maior.

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Os estudiosos que pertenciam à escola de Pitágoras (século VI a.C.) conseguiram provar também que essa é a propriedade característica de todo triângulo retângulo. Em homenagem a seu mestre, deram ao teorema o seu nome.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Teorema de Pitágoras.
Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

A mesma propriedade, portanto, se verifica em triângulos retângulos de quaisquer dimensões, mas não há dúvida de que as medidas escolhidas pelos egípcios (3, 4, 5) eram as mais práticas.

Esse mesmo procedimento de medição é usado ainda hoje por mestres-de-obras, quando iniciam a construção de uma casa. As paredes em geral formam ângulos retos entre si e, para marcar sua localização, o pedreiro usa estacas e três barbantes, que medem, respectivamente, 3, 4 e 5 m. O processo de montagem do "triângulo de barbantes" é o mesmo herdado dos egípcios.

Se conversarmos a esse respeito com um construtor, pedreiro ou mestre-de-obras, descobriremos que eles trabalham de modo tão empírico quanto os antigos egípcios...

Lados congruentes e losangos

Até a 3ª série, não é preciso falar em medidas com os alunos, a não ser em situações práticas de comparação, como a altura de dois alunos, a quantidade de refrigerante ou o tamanho do pedaço de bolo que cada criança receberá na hora do lanche, etc.

No momento, porém, de falar em classificação dos quadriláteros pelas medidas de seus lados, será necessário apresentar aos alunos atividades em que eles possam começar a desenvolver o conceito de medidas — em particular a idéia de comprimento. Para isso, é interessante propor situações que envolvam os alunos, como nos exemplos a seguir:

- Vamos fazer um varal para colocar em exposição o trabalho dos alunos. O varal deve ir de uma parede à outra. Qual o tamanho do fio que devemos providenciar?
- Que tal fazermos um painel e enfeitar a classe para a reunião de pais e mestres? Primeiro prendemos uma tira de papel em todo o comprimento da lousa e, depois, cada aluno decora um pedaço. Quanto papel iremos precisar?
- Hoje riscaremos no chão do pátio o caminho a ser seguido na amarelinha. Os quadrados devem ficar todos do mesmo tamanho. Como faremos isso?

O professor sugere que os alunos trabalhem em grupos para resolver cada situação, utilizando os materiais disponíveis na classe: varetas, pedaços de barbante de tamanhos variados, tiras de cartolina, lápis e o que mais precisarem — régua (que eles usam sem compreender ainda o significado dos números), palmos, passos, pés, um cinto, etc.

Terminada a tarefa, cada grupo apresenta sua solução. Certamente aparecerão diferentes números para representar a medição. Esses números devem ser registrados no quadro-negro. Observe que nem todos os números obtidos serão naturais, pois a unidade de medida nem sempre cabe um número exato de vezes no comprimento a ser medido. Essa é, portanto, uma excelente situação para se trabalhar com números racionais, tanto na representação fracionária como na decimal.

Vamos supor que quatro grupos tenham medido a largura da sala e que os resultados encontrados sejam: 10 vezes um barbante, 30 tamanhos do lápis, 25 palmos, 15 varetas. Na discussão que se seguirá, o professor pode aproveitar para abordar dois aspectos fundamentais ligados à medida. São eles:

- a importância da escolha do instrumento tomado como "unidade" de medida;
- a necessidade de se conhecer o elemento tomado como "unidade" de medida.

A primeira discussão pode ser: "Qual grupo teve mais trabalho?". A classe vai concluir que foi o grupo que teve de fazer 30 medidas. Solicitados a encontrar uma explicação para isso, os alunos irão comparar os diversos objetos utilizados e perceber que o lápis, que deu mais trabalho, era o menor deles, enquanto o barbante, que deu menos trabalho, era o maior.

O professor pode sugerir, então, que a classe escolha um dos objetos anteriores para medir o comprimento do apagador. Os alunos irão concluir que o barbante já não é o instrumento mais adequado, por ser muito grande; será melhor usar o lápis. Os alunos irão concluir que *cada grandeza a ser medida exige a escolha de um instrumento adequado para servir como unidade de medida*.

Em seguida, o professor escreve números na lousa, sem indicar a unidade usada, e pergunta: "Se, neste momento, entrasse aqui um aluno da outra classe e lhe pedíssemos para arranjar um barbante de tamanho 15, ou 30, ele traria o tamanho de que precisamos?" Certamente os alunos irão concluir que não, pois o valor da medida muda de acordo com a unidade empregada na medição. Fica evidente, portanto, que ao se registrar o resultado de uma medição, deve-se indicar também o instrumento utilizado como unidade de medida.

É importante observar que, ao discutir qual grupo teve mais trabalho na medição, os alunos estarão diante de uma situação de proporcionalidade, em que as grandezas focalizadas são:

- o comprimento da unidade escolhida para medir a largura da sala (o barbante, a vareta, o lápis ou os palmos); e
- a quantidade de vezes necessária para que a unidade escolhida cubra a largura da sala.

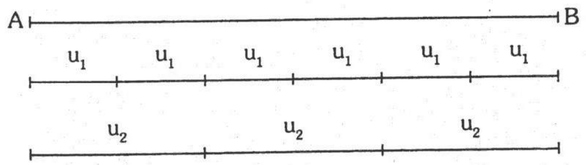
Nesse caso, estarão lidando com um exemplo de grandezas inversamente proporcionais: quanto *maior* a unidade escolhida, *menor* será a quantidade de vezes que ela caberá no comprimento a ser medido.

Assim, quando a primeira grandeza cresce, a segunda diminui a mesma quantidade de vezes, e vice-versa: quando a primeira grandeza diminui, a segunda cresce a mesma quantidade de vezes. Pode-se também observar que o produto dos valores correspondentes das duas grandezas é sempre o mesmo.

Pelos números obtidos na experiência de medição, observa-se que na largura da sala cabe 10 vezes o barbante, ou 30 vezes o lápis. Conclui-se daí que o tamanho do barbante é o triplo do tamanho do lápis, pois a quantidade de barbante necessária para cobrir a largura da sala é a terça parte da quantidade de lápis. (Supondo que o lápis tenha 16 cm, o barbante medirá 48 cm — o triplo —, e a largura da sala será dada por $30 \times 16 = 480$ cm ou $10 \times 48 = 480$ cm — o mesmo produto.)

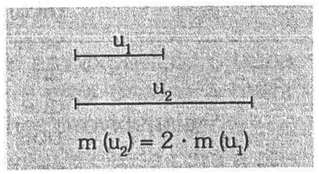
Essa última observação não pode ser totalmente compreendida pelas crianças. Segundo Piaget e seus colaboradores (PIAGET & INHELDER, 1972), por volta dos 10 anos a criança só é capaz de perceber a relação qualitativa: *uma grandeza cresce e a outra diminui*. Antes dos 14 ou 15 anos, ela ainda não está apta, do

ponto de vista de sua estrutura mental, para compreender que a variação das grandezas se dá em razões inversas. Por exemplo, vamos supor que tenhamos de medir um segmento $\overline{AB}$ e haja duas unidades de medida disponíveis: u_1 e u_2. Teríamos:



$m(\overline{AB}) = 6\ u_1$

$m(\overline{AB}) = 3\ u_2$

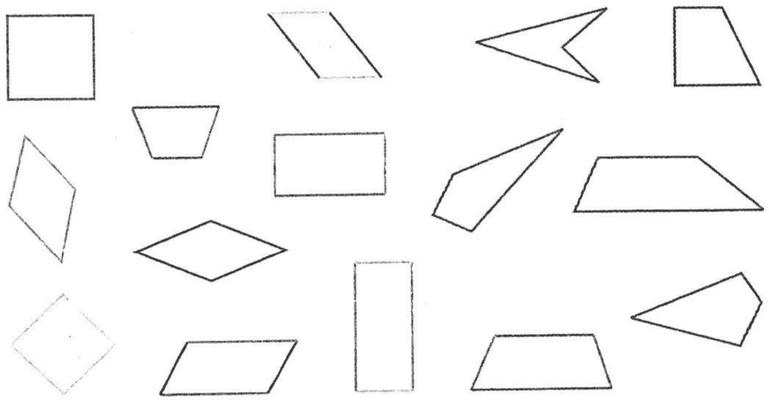


Não há necessidade de uma discussão teórica a respeito dessa proporcionalidade constatada. A classe apenas verifica a relação existente entre as duas grandezas, dentro da situação vivenciada.

Assim, nesse momento, o tema *proporcionalidade* é trabalhado de modo apenas experimental, de acordo com a proposta de "currículo em espiral" de Bruner: trata-se de facilitar a generalização desse tema em fases posteriores da vida do aluno.

Depois da primeira aproximação com o tema *medidas*, retoma-se o trabalho de classificação dos quadriláteros. A classe escolhe um instrumento qualquer como unidade de medida e com ele compara todos os lados de um quadrilátero; em seguida, deverá colorir com a mesma cor os lados que forem do mesmo tamanho (ou *congruentes*) e separam os quadriláteros que têm dois lados do mesmo tamanho, depois três e depois os quatro.

O professor dirá aos alunos que os quadriláteros que possuem os quatro lados do mesmo tamanho são *losangos*; os demais são os *não-losangos*.



Classificação geral dos quadriláteros

Com alunos de 4ª ou 5ª série, o professor pode propor um quadro da classificação geral dos quadriláteros. Numa folha de sulfite, a classe irá organizar as seguintes regiões:

	Paralelogramo		Não-paralelogramo	
	Losango	**Não-losango**	**Trapézio**	**Não-trapézio**
Retângulo				
Não-retângulo				

Em cada uma das regiões, serão colocados os quadriláteros do Anexo 4, de acordo com suas características.

Ao analisar o resultado da distribuição dos quadriláteros nesse quadro, os alunos irão verificar que:

- fizeram uma classificação geral de todos os quadriláteros;
- o quadrado é um quadrilátero especial, por ser ao mesmo tempo paralelogramo, retângulo e losango;

O professor pode então chamar a atenção dos alunos para o fato de que há trapézios com dois lados de mesmo tamanho (chamados *trapézios isósceles*) e trapézios com dois ângulos retos (chamados *trapézios retângulos*).

Os triângulos

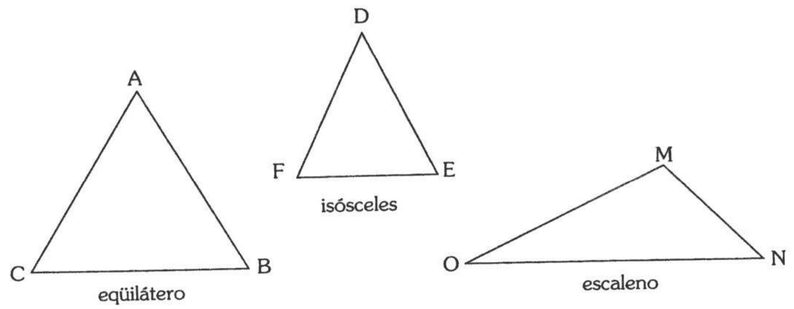
Para iniciar o estudo dos triângulos, os alunos podem ser convidados a classificar uma coleção como a do Anexo 6, por exemplo, segundo seus próprios critérios.

Se durante a apresentação da atividade de cada grupo já surgirem as classificações tradicionais, o professor apenas complementa o trabalho, dando os nomes específicos de cada grupo. Se isso não acontecer, as classificações poderão ser induzidas, como segue.

Classificando pela medida dos lados

De modo análogo ao que foi realizado com os quadriláteros, os alunos deverão pintar da mesma cor os lados do triângulo que tiverem medidas iguais. Surgirão três grupos de triângulos:

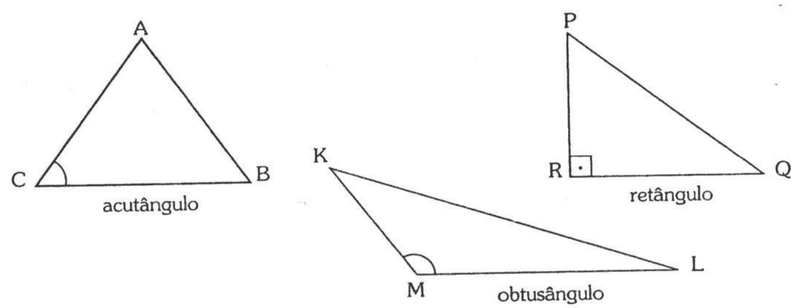
- os que apresentam os três lados congruentes, chamados de *eqüiláteros*;
- os que apresentam apenas dois lados congruentes, denominados *isósceles*;
- os que apresentam os três lados com medidas diferentes, chamados *escalenos*.



Classificando pela medida dos ângulos

Os alunos comparam os ângulos internos de cada um dos triângulos usando um dos modelos de ângulo reto construídos com os discos de papel. Surgem, novamente, três grupos de triângulos:

- os que têm um ângulo reto e os outros dois agudos, denominados *triângulos retângulos*;
- os que têm um ângulo obtuso e os demais agudos, denominados *triângulos obtusângulos*;
- os que têm os três ângulos agudos, chamados *triângulos acutângulos*.



Reproduzindo triângulos

A atividade seguinte é a reprodução de triângulos com a ajuda de canudinhos de refrigerante e fios, varetas e massa de modelar, ou desenhos.

A partir dessas construções, os alunos irão descobrir diversas propriedades dos triângulos, como rigidez, relação entre as medidas dos lados e relação entre as medidas dos ângulos.

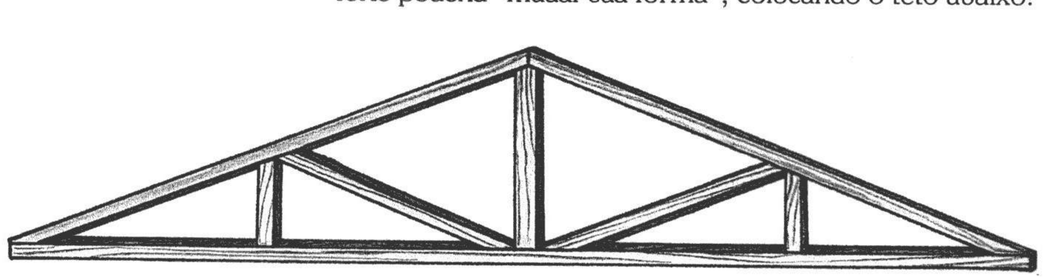
RIGIDEZ DO TRIÂNGULO

Quando constroem um triângulo utilizando canudinhos de refrigerante unidos por um barbante, os alunos percebem que ele fica rígido. É impossível mudar sua forma puxando os lados.

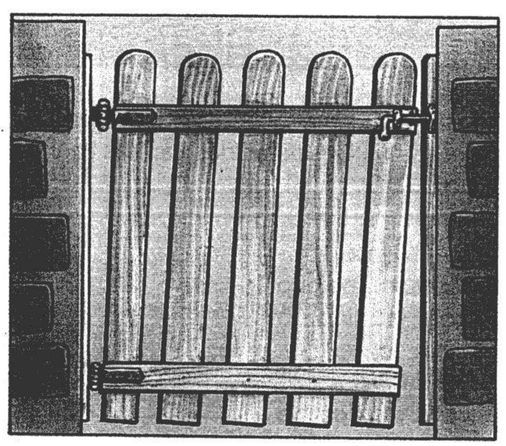
Fazendo a mesma experiência com um quadrilátero construído com o mesmo material, os alunos verificam que ele muda de forma quando puxado pelos lados. O mesmo ocorre com os pentágonos, hexágonos e quaisquer outros polígonos.

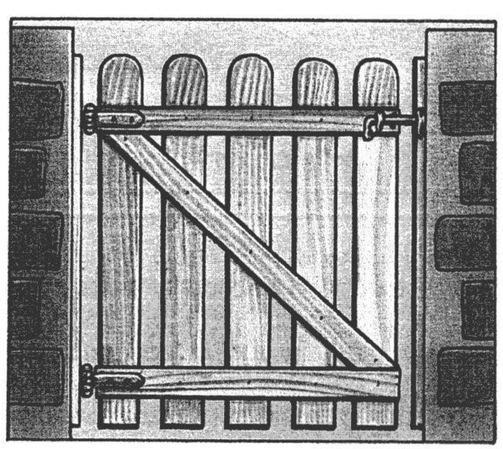
É interessante que os alunos observem aplicações práticas dessa propriedade em seu cotidiano:

- Na construção de um telhado, o carpinteiro sempre faz uma estrutura de madeira, conhecida como "tesoura", que tem a forma de um triângulo. Se tivesse a forma de retângulo, pentágono ou qualquer outra, certamente um vento forte poderia "mudar sua forma", colocando o teto abaixo!



- Nos portões feitos com sarrafos de madeira, sempre se coloca uma travessa em diagonal, formando um triângulo com as travessas horizontais, para garantir rigidez ao conjunto. Sem isso, o portão entortaria ao primeiro empurrão.





Relação entre as medidas dos lados

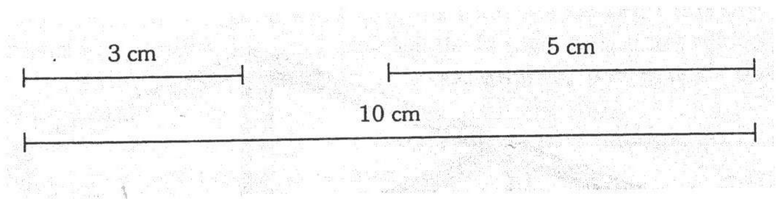
Novamente, os alunos constroem triângulos com canudinhos ou varetas. Se o material tiver medidas variadas, é possível que surjam casos em que não é possível formar o triângulo. Esses casos deverão ser estudados e discutidos pela classe toda, para que seja descoberta a seguinte relação:

Em todo triângulo, a medida de cada lado é menor que a soma das medidas dos outros dois lados.

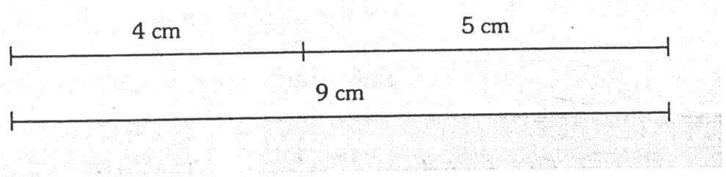
Para introduzir uma discussão mais sistemática, pode-se pedir aos alunos que construam triângulos utilizando varetas com as seguintes medidas (fornecidas pelo professor):

- 10 cm, 3 cm, 5 cm;
- 9 cm, 4 cm, 5 cm;
- 9 cm, 4 cm, 7 cm.

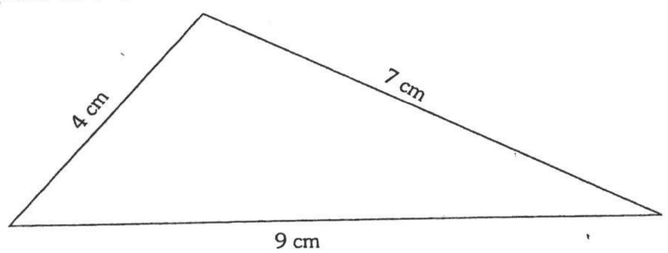
No primeiro caso, os alunos perceberão que o comprimento das varetas menores não é suficiente para compensar o lado de 10 cm.



No segundo, verificarão que têm dois segmentos de mesma medida, um sobre o outro, e não o triângulo esperado.



Com o último conjunto de varetas, os alunos conseguirão formar o triângulo, pois a soma das medidas das varetas menores supera os 9 cm da maior.



Relação entre as medidas dos ângulos

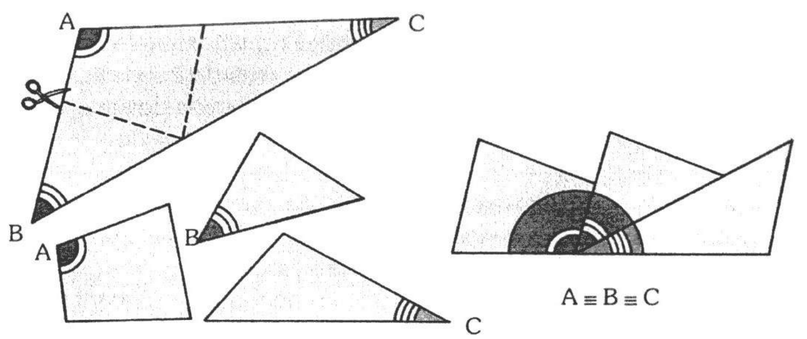
O professor pode propor aos alunos que usem o ângulo reto feito com os discos de papel e tentem desenhar triângulos nos seguintes casos:

a) com apenas um ângulo reto;
b) com dois ângulos retos;
c) com apenas um ângulo obtuso;
d) com dois ângulos obtusos;
e) com apenas um ângulo agudo;
f) com dois ângulos agudos;
g) com três ângulos agudos.

Os alunos conseguirão construir apenas os triângulos *a*, *c*, *f* e *g*. Ao discutir esses resultados, verificam que as possibilidades de construção do triângulo estão ligadas à abertura dos lados, ou seja, dependem dos ângulos formados.

Até aqui, não trabalhamos a unidade padrão de medida de ângulos, o *grau*. A única unidade de referência que citamos foi o ângulo reto. Assim, não podemos trabalhar de maneira convencional a propriedade de que, em todo triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180°.

Mesmo assim, os alunos podem fazer algumas verificações importantes a esse respeito. Primeiro, recortam os triângulos construídos e pintam em cada um os três ângulos internos. Em seguida, recortam cada um dos triângulos em três partes, conforme a figura, e juntam-nas de modo a fazer coincidirem os três vértices:



Comparando essa montagem com o ângulo reto, observam que em todos os casos o ângulo total obtido é o de "meia volta", ou dois ângulos retos.

Assim, será possível compreender, por exemplo, que não existe triângulo com dois ângulos obtusos, pois os dois juntos já ultrapassariam dois ângulos retos. Do mesmo modo, seriam justificadas as outras impossibilidades encontradas (*b* e *e*).



COMPLEMENTAR

1. [A geometria ao alcance da mão]

Muitas vezes realizamos com nossos alunos atividades que são encaradas como simples divertimentos, tais como quebra-cabeças, jogos de montar, pinturas, colagens, etc., aparentemente mais indicadas às aulas de artes do que de matemática. Porém, tais atividades não só são importantes para o desenvolvimento da intuição espacial e de habilidades para visualizar, desenhar, interpretar e construir, como têm relação com a formação do pensamento geométrico dedutivo. [...]

Embora muitos educadores afirmem que o raciocínio espacial e a geometria estão relacionados (entendendo-se por raciocínio espacial o conjunto de processos cognitivos por meio dos quais as representações mentais de objetos, relações e transformações espaciais são construídas e manipuladas), nossa prática escolar parece indicar que não estamos conscientes de quão complexas são as relações que se estabelecem em nossas mentes e nas de nossos alunos, quando tratamos com figuras espaciais, com relações entre figuras, suas representações, etc. [...]

(KALEFF, A. Maria. Tomando o ensino da geometria em nossas mãos. *A educação matemática em revista.* Blumenau, SBEM. Ano I, n. 2, 1994, p. 19-25.)

2. [Como se constroem relações espaciais]

A construção da noção de *espaço* pela criança requer uma longa preparação. Realiza-se por meio de uma liberação progressiva e gradual do egocentrismo. A criança que antes localizava os objetos utilizando seu próprio corpo como referência, passa então a localizá-los a partir das relações estabelecidas entre eles pela coordenação de diferentes pontos de vista ou de um sistema de coordenadas, deixando de ser o centro de todas as ações. Por esse processo passa do egocentrismo à descentração.

A construção da noção de espaço se faz por etapas, mas sempre associada à descentração e apoiada na coordenação das ações.

Inicialmente, para a criança, o espaço é essencialmente um *espaço da ação*. Ela constrói suas primeiras noções de espaço: próximo, dentro, fora, em cima e embaixo, através dos sentidos (visão, tato, etc.) e de seus próprios deslocamentos (exemplo: rodear, rastejar, engatinhar, andar). O espaço é o espaço vivido, um *espaço prático*, organizado e equilibrado quanto à ação e ao comportamento.

Por volta dos dois anos de idade, aproximadamente, com o aparecimento da função simbólica (possibilidade de substituir uma ação ou objeto por um símbolo, imagem ou palavra), começa a se constituir na criança o *espaço representativo*: as ações já executadas são interiorizadas, mas a criança não consegue representar as ações, mesmo as mais simples, antes de executá-las concretamente. Assim é que, para representar uma ordenação de objetos, ela terá que inicialmente fazer essa ordenação manipulando os objetos.

O espaço representativo compreende duas subetapas: a) *espaço intuitivo*, que resulta

da interiorização das ações espaciais realizadas em nível perceptivo-motor, em que as representações são estáticas e irreversíveis, ou seja, a criança faz, por exemplo, uma ordenação, ordem direta, mas não consegue representar a ordem indireta. Não é capaz de identificar relações de reciprocidade, nem coordenar diferentes pontos de vista; b) *espaço operatório,* que resulta da operacionalização do espaço intuitivo. As representações são móveis e reversíveis. A criança consegue, após ter feito uma ordenação (ordem direta), fazer a inversão, sendo capaz de identificar relações de reciprocidade e coordenar diferentes pontos de vista.

Há necessidade de fazer distinção entre o *espaço perceptivo* e o *representativo*: o primeiro se constrói em contato direto com o objeto, e o outro na sua ausência. O espaço perceptivo se constrói mais rapidamente que o representativo. Pode-se constatar esse fato observando que as crianças discriminam formas geométricas simples bem mais cedo do que sua reprodução gráfica.

Por exemplo, o losango é reconhecido e discriminado aos 4 anos, mas somente aos 7 ele é reproduzido. Sua construção requer concepções geométricas dos diferentes elementos da figura (linhas e ângulos) que não foram elaborados pelas crianças de menos idade. Isso vem demonstrar que não é suficiente a percepção para a construção da noção de espaço.

(PAVANELLI, Tomoko I. Como se constroem relações espaciais. *Revista do Professor.* Porto Alegre, CPOEC, jan./mar. 1987, p. 17-8.)

3. [A geometria nossa de cada dia]

O homem e o universo sempre estiveram envolvidos por estruturas e formas geométricas. À medida que o homem primitivo foi observando o mundo à sua volta, começou a abstrair idéias geométricas e a desenhar figuras para representá-las. [...]

Van Hiele, como resultado de um estudo sobre o desenvolvimento cognitivo do estudante de geometria, identificou os cinco níveis seguintes:

Nível 1. O aluno aprende algum vocabulário e reconhece uma forma como um todo. (Por exemplo, pode estabelecer diferenças entre várias figuras geométricas, como quadrado, paralelogramo, retângulo, triângulo, e pode associar nomes com figuras geométricas fundamentais.)

Nível 2. O aluno começa a analisar figuras (por exemplo, um triângulo tem três lados, um triângulo isósceles tem dois lados de comprimentos exatamente iguais).

Nível 3. O aluno ordena figuras logicamente, compreende inter-relações entre elas e o papel da definição (por exemplo, relações como paralelo, perpendicular, congruente, semelhante; a idéia é que a definição dá os atributos necessários e suficientes para a classificação de uma figura).

Nível 4. O aluno compreende o significado da dedução e o papel dos postulados, teoremas e provas (geralmente no decorrer do Ensino Médio).

Nível 5. O aluno consegue uma compreensão mais acurada e é capaz de fazer deduções abstratas (final do Ensino Médio e primeiros anos do curso superior). [...]

As experiências com geometria no Ensino Fundamental têm como principal finalidade ajudar as crianças a atingir os níveis 1, 2 e 3. Não é incomum os professores das séries iniciais deixarem de lado os tópicos relativos à geometria, mesmo que o livro-texto utiliza-

do por ele os inclua. Com certeza, estão operando sobre premissas estabelecidas na época em que eles próprios estudaram geometria nos bancos escolares. Parecem sentir que a geometria é um tipo de disciplina desinteressante e direcionada para a comprovação, o que a tornaria desinteressante e difícil para eles e para as crianças de suas classes. Essa ênfase no processo dedutivo é, algumas vezes, até reforçada em cursos de formação de professores [...] limitando sua habilidade tanto em visualizar criativamente a geometria como em apreciar as atividades geométricas.

Além disso, uma análise das atividades geométricas propostas para crianças das séries iniciais indica que elas são apresentadas de maneira informal, sem provar, e utilizando freqüentemente um envolvimento ativo com materiais concretos.

As crianças começam a aprender conceitos pela observação dos objetos que se encontram em seu meio ambiente, pela classificação dos mesmos ou de suas representações geométricas em termos de algumas características escolhidas, tais como vértice, tamanho, número de lados, número de vértices, e assim por diante.

Mais tarde, à medida que as crianças progridem até os níveis 2 e 3 da escala de Van Hiele, aprendem habilidades (manuais) para a construção geométrica através de um envolvimento ativo com instrumentos, tais como réguas, compassos e transferidores. Freqüentemente, é possível dar oportunidade aos estudantes para a descoberta de generalizações geométricas (7ª e 8ª séries).

Muitos professores se surpreendem com o fato de que não é necessário enfatizar terminologias complicadas e definições formais até o final do Ensino Fundamental. Nas séries seguintes do Ensino Médio, os alunos são ajudados a alcançar o nível 4 da escala de Van Hiele e encorajados a atingir o último nível.

(Adaptado de: O'Daffer, Phares G. *Geometria: o que será um currículo balanceado e abrangente.* Trad. Regina Maria Pavanello. São Paulo, Cenp, 1990. Mimeo.)

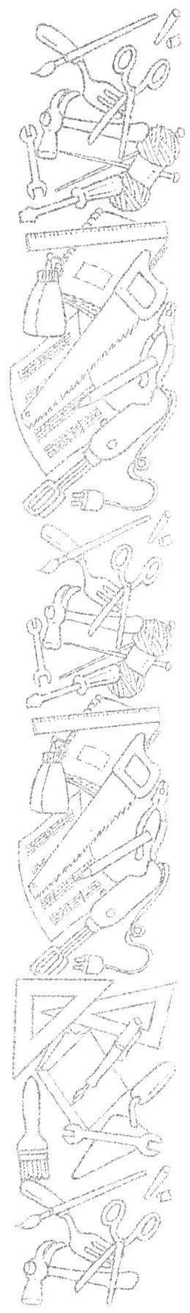


a) Mesinhas, cadeiras ou carteiras da sala de aula, vassouras, brinquedos, papel manilha e material de sucata podem ser utilizados, nas turmas de pré-escola ou 1ª série, para se construir uma lojinha, um foguete, uma caverna, um circo, etc. Crie uma atividade desse tipo e ofereça-a a crianças de 5 a 7 anos, observando:
- como utilizam o espaço;
- como usam o material disponível para representar o que desejam;
- como relacionam os objetos entre si ao utilizá-los.

b) Em grupo, organize uma atividade de percurso com crianças de 1ª série — por exemplo, uma caminhada da sala de aula até o pátio —, incentivando-as a observar e comentar cada ponto que lhes chame a atenção: uma escada, uma janela de onde se vê a rua, a cantina, etc. De volta à classe, peça-lhes que representem o percurso com um desenho.
Comente os resultados no contexto da leitura "Como se constroem relações espaciais".

c) Analise alguns livros didáticos e propostas de ensino e procure localizar neles os cinco níveis estabelecidos por O'Daffer, em "A geometria nossa de cada dia", para a aprendizagem de geometria na escola.

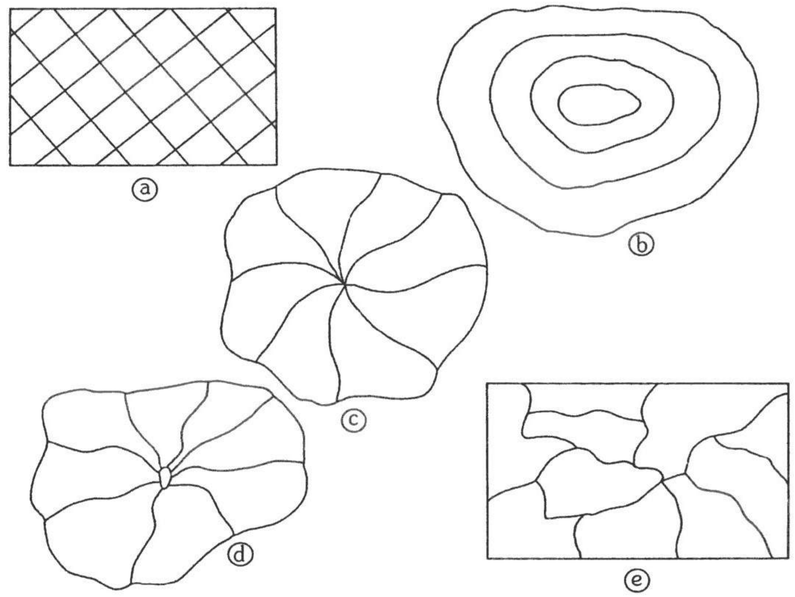
Para você fazer



1. Pinte as "colchas de retalhos" a seguir, de acordo com as instruções:

a) as figuras *a*, *b* e *c* você deve colorir como achar mais atraente, com a condição de que duas partes colocadas lado a lado tenham cores diferentes;

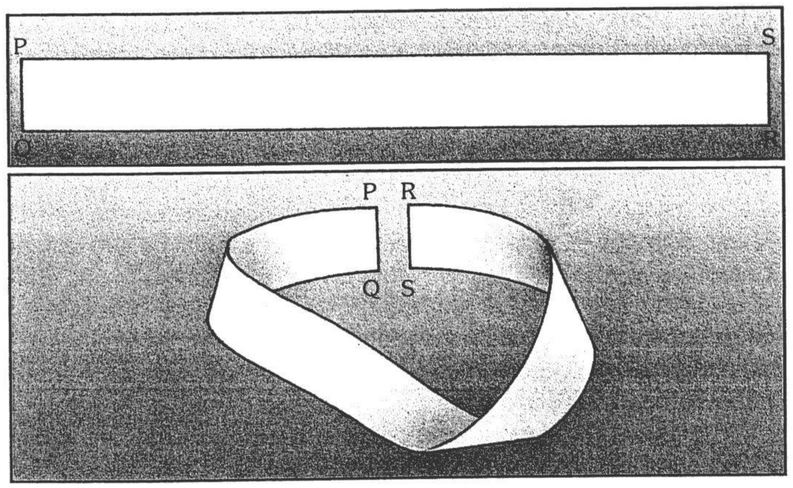
b) as figuras *d* e *e* você vai colorir do mesmo modo que as anteriores, mas empregando a menor quantidade de cores possível.



2. Recorte duas tiras de papel sulfite com cerca de 3 cm de largura e o comprimento da folha toda:

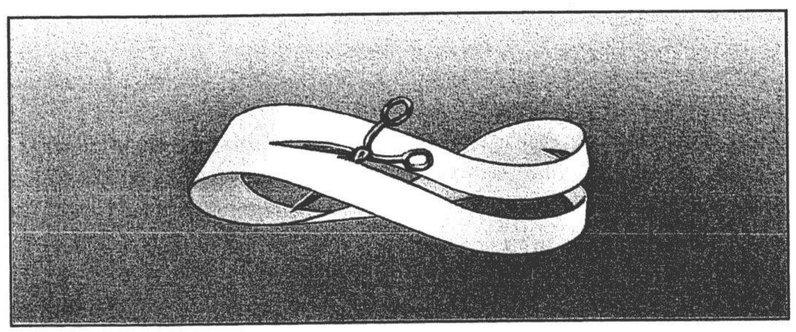
a) Considere uma das tiras: qual a quantidade mínima de cores que você deverá usar para colori-la, uma para cada lado, sem deixar nenhuma parte sem cor? Pinte realmente a tira, para verificar se sua resposta está certa.

b) Pegue a outra tira, torça-a e cole as extremidades, como na figura a seguir, de tal modo que o ponto S fique sobre Q e o ponto S fique sobre R.



A figura que você acabou de construir chama-se, em topologia, *faixa de Moebius**. Quantas cores, no mínimo, você deverá usar para colorir sua faixa de Moebius, da mesma forma que fez em *a*? Pinte realmente a faixa para verificar se sua resposta está certa.

c) Faça um furo em um ponto qualquer de sua faixa de Moebius, a meia distância da margem. Em seguida, com uma tesoura, corte a faixa no sentido do comprimento, a partir do furo, e veja o que acontece.



d) O que aconteceria se você cortasse a figura obtida em *c* do modo já descrito? Faça a experiência e confira o resultado.

3. Analise as situações sugeridas nos itens a seguir e faça uma figura representando cada caso. Depois classifique as figuras em lineares, bidimensionais ou tridimensionais.

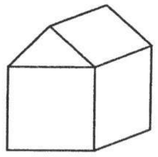
   a) Para saber qual é o espaço ocupado por um tijolo, quantas medidas precisamos tomar?

*O nome se deve a Augustus Ferdinand Moebius, matemático e astrônomo alemão (1790-1868), que criou esse fascinante objeto que não tem o "outro lado".

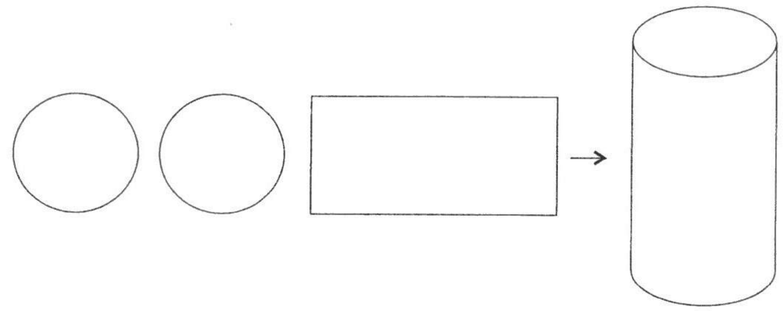
b) Se um construtor vai comprar rodapés para colocar em uma sala, que medidas da sala ele precisa conhecer?

c) Uma pessoa quer alugar um salão para fazer uma loja. Que medidas do salão ela deve perguntar ao corretor para saber se nele vão caber todos os móveis e, ainda, se vai haver espaço para a circulação das pessoas?

4. Escolha, em sua coleção, alguns poliedros e monte novas figuras, como a do exemplo a seguir. Depois, verifique se a relação de Euler é válida nos novos poliedros que você montou:



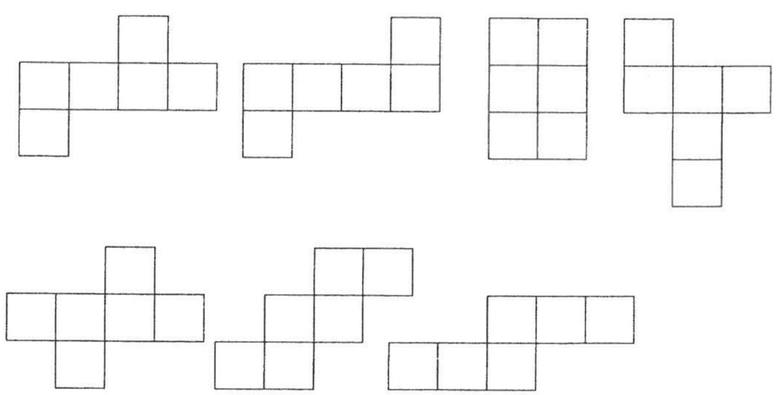
5. Entre as figuras do Anexo 2, escolha algumas que possam ser compostas e forme o molde de um sólido geométrico. Por exemplo:

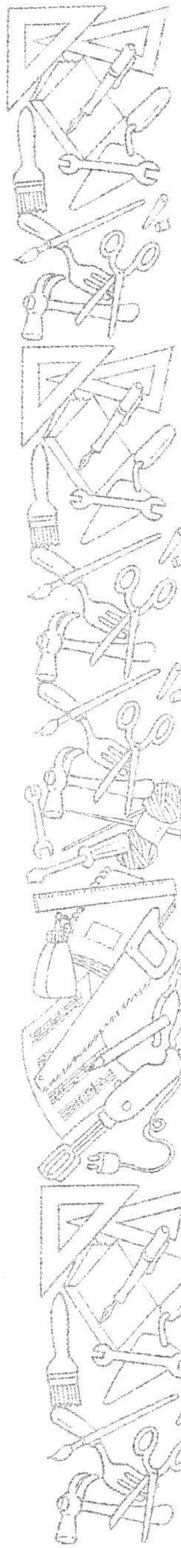


6. Faça o que se pede:

   a) Recorte 6 quadrados de mesma medida. Repita com eles o jogo que foi descrito neste capítulo para as faces da caixa de creme dental.

   b) Reproduza em papel sulfite as configurações planas apresentadas a seguir e indique quais você acha que correspondem a moldes do cubo. Depois recorte esses moldes e monte as figuras para conferir suas respostas.





7. Reproduza em sulfite as figuras do Anexo 3 e responda:

   a) Com quais moldes você pode montar uma caixa fechada?

   b) Quais necessitam de mais uma face para resultar numa caixa fechada?

   c) Quais necessitam de mais 2 faces?

   d) E de mais 3 faces?

   Depois monte as caixas para conferir suas respostas e classifique-as segundo as "famílias" estudadas neste capítulo.

8. Na coleção de quadriláteros que aparecem no Anexo 4 não há nenhum com três ângulos retos e um ângulo não-reto. Verifique se é possível ou não construir um. Explique sua resposta.

9. Com um transferidor, construa um trapézio em que um dos ângulos internos tenha por medida 100°. A seguir, meça os outros três ângulos internos e calcule a soma dos quatro. Faça o mesmo com um quadrilátero em forma de losango. Depois construa um quadrilátero convexo à sua escolha; meça e some os ângulos internos. O que você conclui dessas experiências? Há alguma relação entre esta atividade e a anterior?

10. Nas situações a seguir, temos grandezas que variam proporcionalmente. Em cada um dos casos, identifique as grandezas em questão e indique se elas são direta ou inversamente proporcionais:

    a) Duas estradas de mesma largura devem ser asfaltadas. Uma tem 200 km de comprimento e a outra, 600 km. Em qual delas se gastará maior quantidade de asfalto?

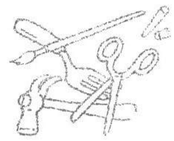
    b) André e Sílvio estão apostando uma corrida de bicicleta. A velocidade média de André é menor que a de Sílvio. Quem levará mais tempo para cobrir o percurso?

    c) Tenho dois livros para ler. O livro A tem 300 páginas; o livro B, 265. Costumo ler 20 páginas por noite. Qual dos livros levarei mais noites para ler?

    d) Minha amiga tem dois livros para ler, ambos com 300 páginas. Ela está gostando mais do livro C e, por isso, lê 30 páginas por noite; enquanto do livro D lê 10 páginas por noite. Qual dos livros ela levará mais tempo para ler?

    e) Para comprar 5 m de tecido, uma costureira deverá gastar R$ 60,00. Se ela resolver comprar só 2,80 m, sua despesa irá aumentar ou diminuir?

11. Para construir um triângulo com lados de 5 e 8 cm, qual deverá ser o comprimento do terceiro lado? Por quê?



12. Construa um triângulo isósceles em que o ângulo formado pelos dois lados iguais meça 52°. Há outras soluções diferentes da sua? Explique.

PARA SABER MAIS

BIEMBENGUT, M. S. *Número de ouro e secção áurea*. Santa Catarina, FURB, 1996.

_____. *Ornamentos × criatividade*. Santa Catarina, FURB, 1996.

COORDENADORIA de Estudos e Normas Pedagógicas (Cenp). *Atividades matemáticas* (todos os volumes). São Paulo, Secretaria de Estado da Educação, 1991.

_____. *Proposta curricular para o ensino de matemática — 1º grau*. 4. ed. São Paulo, Secretaria de Estado da Educação, 1991.

_____. *Prática pedagógica: matemática 1º grau*. 4. ed. São Paulo, Secretaria de Estado da Educação, 1993.

DIENES, Z. P. & GOLDING, E. W. *Exploração do espaço*. São Paulo, MEC/EPU, 1969.

_____. *A geometria pelas transformações*. São Paulo, MEC/EPU, 1969.

IMENES, L. M. *Geometria dos mosaicos*. São Paulo, Scipione, 1988. Col. Vivendo a Matemática.

_____. *Descobrindo o teorema de Pitágoras*. São Paulo, Scipione, 1988. Col. Vivendo a Matemática.

LINDQUIST, M. M. & SHULTE, A. P. (orgs.). *Aprendendo e ensinando geometria*. São Paulo, Atual, 1994.

MACHADO, N. J. *Medindo comprimentos*. São Paulo, Scipione, 1988. Col. Vivendo a Matemática.

TAHAN, Malba. *Matemática divertida e curiosa*. Rio de Janeiro, Record, 1994.

_____. *As maravilhas da matemática*. Rio de Janeiro, Bloch, 1973.



MEDIDAS

Tudo que se veste e compra,
as ruas e os terrenos em sua volta,
a casa onde se mora,
a chuva, o vento e a neve,
as estrelas e os dias,
já foram contados de algum jeito.

Jeanne Bendick

O tema deste capítulo é abordado em várias passagens do livro, pois as medidas estão de tal forma presentes em nossas atividades cotidianas, que não há como tratá-las de maneira isolada. No entanto, pretendemos aqui sistematizar o estudo das medidas.

Segundo Piaget, a criança não se preocupa com medições até aproximadamente 9 anos. Muito antes, contudo, ela já se envolve com medidas, embora de modo bastante informal. Por exemplo: ao verificar se é mais alta que o colega, na fila; se a quantidade de refrigerante que recebeu é igual à do irmão; etc. Algumas situações, porém, exigem maior cuidado, como nos casos em que é fundamental a precisão das medidas. Aí torna-se necessário o conceito de medida e suas aplicações.

Pode-se afirmar que medir é comparar grandezas de mesma espécie, sendo o resultado de cada medição expresso por um número.

Vimos no capítulo anterior, nos tópicos sobre classificação geral dos quadriláteros e classificação dos triângulos, alguns aspectos muito importantes relacionados às medidas:

- Para medir uma grandeza, é necessário escolher uma unidade de medida, ou seja, uma grandeza da mesma espécie para comparar com aquela que se quer medir.
- É importante escolher a unidade mais adequada à situação. Não convém, por exemplo, escolher um palito de fósforo para medir a largura da rua, nem nosso palmo para medir o comprimento do palito.
- A unidade escolhida para medir uma grandeza deve ser conhecida pelos interessados na medição, pois apenas o número, sem referência à unidade, nada significa. Ao ouvir que "Fulano pesa 50", não podemos concluir se é gordo ou magro, a não ser que nos informem que são 50 quilos, 50 libras, 50 vezes o peso de um tijolo, etc. (e também, nesse caso, a altura dele).

Uma vez iniciado o trabalho com as medidas de comprimento, sem referência às unidades padronizadas, vamos focalizar agora os conceitos de área e perímetro de polígonos.

Área e perímetro de polígonos

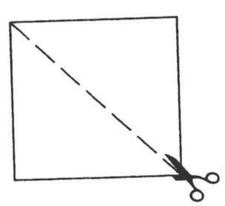
Vimos que medir é comparar grandezas de mesma espécie. Então, para medir uma superfície, nós a comparamos com outra, tomada como unidade de medida. Podemos, por exemplo, medir o piso de uma cozinha assentando todos os ladrilhos para depois contá-los.

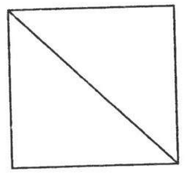
Assim, para que as crianças construam o conceito de área ou de medida de uma superfície, é necessário que vivenciem muitas experiências de compor e decompor figuras planas.

Composição de figuras

Após o trabalho de familiarização com quadriláteros e triângulos, os alunos já estarão preparados para atividades que irão capacitá-los a compreender o conceito de área e as fórmulas para o cálculo das áreas desses polígonos. As atividades a seguir podem ser realizadas em grupo.

1. Construa dois quadrados iguais e corte-os ao meio, obtendo quatro triângulos.





a) Forme figuras livremente com os triângulos.
b) Use dois triângulos para fazer um outro triângulo e, depois, um paralelogramo.
c) Com três triângulos, forme um trapézio.
d) Empregando os quatro triângulos, forme:
- um retângulo;
- um paralelogramo;
- um quadrado.

e) Com os mesmos triângulos, construa um novo quadrilátero.

2. Faça duas figuras iguais a cada um dos modelos do Anexo 7. Em seguida:
a) usando duas figuras iguais, construa um quadrado;
b) usando duas figuras iguais, construa um retângulo;
c) com dois trapézios, faça um paralelogramo;
d) usando outras duas figuras, faça um paralelogramo;
e) usando dois triângulos, construa um paralelogramo que não seja retângulo;

3. Com as mesmas figuras, usando recortes e colagens transforme:
a) um paralelogramo em um retângulo;
b) dois retângulos iguais em um losango;
c) um trapézio em um retângulo.

4. Cada uma das crianças recebe um Tangram como o do Anexo 8; junto recebem também cópias das figuras que constam do mesmo Anexo.

Os alunos analisam o Tangram e depois o recortam e pintam com a mesma cor as peças que forem iguais. Com essas peças serão realizadas as atividades a seguir.

a) Dar o nome de cada um dos polígonos que formam as partes do Tangram.
b) Para "aquecimento", preencher com as sete peças as figuras 2 e 3 do Anexo 8 cujas partes estão pontilhadas.
c) Preencher novamente com as sete peças cada uma das figuras do mesmo Anexo que estão apenas em silhueta.
d) Agora os alunos usam as peças do Tangram, sem seguir as regras do jogo tradicional, mas de acordo com as novas instruções:
- construir um triângulo com duas peças;
- construir um triângulo com três peças;
- construir um trapézio com duas, depois com três e depois com quatro peças;
- construir um paralelogramo não-retangular com duas, depois com três e com quatro peças;
- construir um quadrado com duas, depois com três peças, e assim por diante, aumentando o número de peças até sete. (Atenção: com seis não há solução!)

Em cada um dos casos, os alunos deverão procurar outras soluções, além da primeira que for encontrada.

O conceito de área

O trabalho com a construção desse conceito pode começar pela observação do piso da classe e de outras dependências da escola ou de casa. No dia seguinte, o professor sugere que façam a representação de um piso de que tenham gostado. Certamente aparecerão vários ladrilhamentos, que servirão para introduzir uma atividade como a que se segue.

Cada grupo de alunos recebe uma folha como a do Anexo 9. O professor pede a cada grupo que escolha um só tipo de ladrilho dos modelos que aparecem na parte superior da folha. Depois, cada grupo irá reproduzir o ladrilho escolhido tantas vezes quantas forem necessárias para recobrir o "piso" que se encontra na parte inferior da folha; as figuras devem ser reproduzidas sobre o retângulo quadriculado. A seguir, cada grupo deve colorir, recortar as figuras e cobrir o piso, sem deixar buracos nem sobrepor as peças. Pode-se usar a quantidade que for necessária para isso.

O ideal é que cada grupo escolha um tipo diferente de ladrilho, para que todos os tipos sejam trabalhados.

Após experimentar qual a melhor disposição das peças, os alunos poderão fazer o ladrilhamento usando cola. Encerrada a tarefa, os pisos serão expostos e terá início uma discussão sobre a tarefa realizada.

Inicialmente, retomam-se as questões ligadas a medições já realizadas no trabalho sobre medidas de comprimento.

A primeira questão é a escolha do objeto tomado como unidade de medida. A classe deve discutir qual dos grupos teve

menos trabalho com o ladrilhamento e qual teve mais, procurando a razão disso. A seguir, o professor pode sugerir outras superfícies para receber ladrilhamento: uma das faces da caixa de fósforos, o piso da sala de aula, o tampo da carteira, o tampo da mesa do professor, etc. Utilizando folha de revista, papel de embrulho, sulfite, ou qualquer outro material, os grupos poderão fazer modelos de ladrilhos convenientes para as superfícies citadas. Encerrada a atividade, as soluções dos diversos grupos para cada piso serão expostas e comparadas.

A segunda questão é a necessidade de se deixar claro qual a unidade de medida utilizada. O professor coloca na lousa os números obtidos pelos alunos ao ladrilharem o piso do Anexo 9. Eles logo perceberão que a mesma superfície pode ter diferentes medidas, de acordo com a unidade utilizada na comparação, e que, portanto, para que o número indicado tenha significado, é preciso conhecer essa unidade.

Também é importante iniciar uma discussão motivando a classe a relacionar entre si as diversas superfícies tomadas como unidade de medida do piso. Para isso, o professor informa na lousa a quantidade de ladrilhos de cada tipo usada para cobrir todo o piso. Tópicos a discutir:

- Por que os números obtidos foram diferentes?
- Por que se utilizou a mesma quantidade de quadrados e de triângulos maiores?
- Por que a quantidade de quadrados é o dobro da quantidade de retângulos?
- Por que a quantidade de quadrados é a metade da quantidade de triângulos menores?

O professor pode então explicar que cada um dos números obtidos representa uma medida, chamada *área da superfície* ladrilhada (no caso, um quadrilátero).

LEMBRE-SE

Denomina-se área a medida da superfície de uma figura.

Nesse ponto do trabalho, o professor se encontra diante de uma situação que envolve grandezas proporcionais: o tamanho do ladrilho utilizado para cobrir o piso e a quantidade de ladrilhos necessária para cobri-lo.

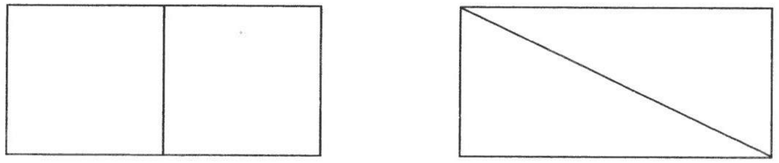
Os alunos verificaram experimentalmente que, quando aumenta o tamanho do ladrilho utilizado, diminui a quantidade de ladrilhos necessária para cobrir o piso, e vice-versa: quando diminui o tamanho do ladrilho usado, aumenta a quantidade necessária para cobrir o piso.

Ao constatar que a quantidade de quadrados é o dobro da quantidade de retângulos necessária para cobrir o piso do Anexo 9, os alunos irão comparar os tamanhos dos dois ladrilhos. E descobrirão que cabem dois quadrados dentro do retângulo, ou seja, o tamanho do quadrado é a metade do tamanho do retângulo. A relação inversa aparece aí: se o tamanho do ladrilho passa à metade do que era, a quantidade de ladrilhos necessária dobra. Do mesmo modo, pode-se explicar por que a quantidade de quadrados é a metade da quantidade de triângulos pequenos necessária para cobrir o piso.

Pode-se dizer, portanto, que as duas grandezas são *inversamente proporcionais*.

Mais uma vez enfatizamos que não há necessidade de transmitir aos alunos a teoria da proporcionalidade entre as grandezas. Bastam essas observações na própria situação trabalhada.

Ainda a respeito dessa experiência, os alunos poderão observar que o quadrado e o triângulo maior são *equivalentes*, isto é, embora apresentem formas diferentes, eles têm a mesma área: são necessários dois quadrados para cobrir o retângulo, e também são necessários dois triângulos para cobrir o mesmo retângulo.



Um material muito rico para o trabalho com áreas e perímetros é o papel quadriculado. Com ele, os alunos podem realizar as medições diretamente, sem necessidade de cobrir toda a superfície com a unidade de medida:

Cada aluno recebe uma folha como a do Anexo 10. Nessa folha estão representadas algumas superfícies poligonais, cujas áreas deverão ser medidas com a utilização das diferentes unidades que aparecem na parte superior da folha. Com os resultados das medições, os alunos preencherão a tabela já iniciada.

A seguir, no espaço livre do quadriculado, cada aluno deverá criar uma nova superfície, que será indicada por F, completando a tabela.

O conceito de perímetro

Para desenvolver esse conceito, retomemos a atividade utilizada para trabalhar a área de uma superfície: o professor pede aos alunos que observem o acabamento na junção entre a parede e o piso de uma casa, denominado rodapé.

Feita a observação, os grupos retomam o piso apresentado no Anexo 9; o professor informa que, uma vez feito o ladrilhamento da sala, só falta o acabamento, ou seja, o rodapé. Os alunos escolhem alguns materiais que representem tipos de rodapés: tiras de papel ou cartolina, barbante, etc.

A mesa do professor será a loja em que se vendem os rodapés; os grupos irão até lá para escolher e comprar a quantidade necessária para seu piso. Mas, para saber quanto devem comprar, precisam medir corretamente o piso.

Ao pensar no modo de realizar a medição, os alunos concluirão que não devem medir a superfície, mas o contorno da sala, ou seja, obter a soma das medidas dos comprimentos dos lados. Nesse momento, o professor explica que essa soma recebe o nome de *perímetro* da sala.

LEMBRE-SE

Denomina-se perímetro a medida do contorno de uma figura, ou seja, a soma dos comprimentos de seus lados.

Quanto à parte prática da situação, a classe poderá discutir sobre que unidade escolher para medir os lados do piso (um palito de fósforo, um pequeno pedaço de lã, os dedos, etc.) e a questão das portas da sala — naturalmente, para se obter a medida correta do rodapé, deve-se subtrair do perímetro a largura de cada porta.

Pode-se agora sugerir aos alunos que meçam o perímetro da sala de aula ou de outras dependências da escola, adotando uma unidade de medida adequada.

É muito importante trabalhar com situações que relacionem área e perímetro de figuras planas, como as sugeridas a seguir:

Situação 1. Cada aluno recebe uma cópia das figuras A, B, C, D, E do Anexo 10. Ele deve calcular a área e o perímetro de cada uma das figuras, considerando como unidade de área o quadradinho (que indicaremos por *q*), e como unidade de comprimento o lado desse quadradinho (que indicaremos por ℓ).

Vejamos um exemplo:

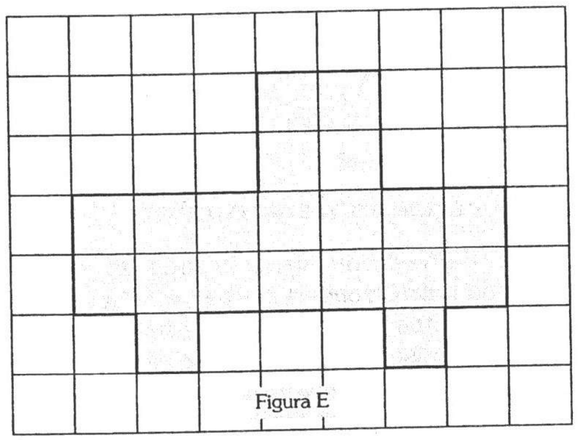


Figura E

Área = 20 q
Perímetro = 26 ℓ

Depois de medir as figuras, os alunos observam os resultados e respondem às questões:

a) o número que indica a área de uma figura é sempre maior que aquele que indica o perímetro? É sempre menor? É sempre igual?

b) a figura que tem maior área é sempre a que tem o maior perímetro? A que tem o menor perímetro tem sempre a menor área?

A seguir, utilizando papel quadriculado, os alunos representam:

c) uma figura em que o número que indica a área é menor que o número que indica o perímetro;

d) uma figura em que os dois números são iguais;

e) duas figuras de mesma área e perímetros diferentes;

f) duas figuras de mesmo perímetro e áreas diferentes.

Situação 2. Usando papel quadriculado, os alunos fazem experimentos para responder às questões:

1. Um jardineiro pretende fazer um canteiro de mudas em seu terreno. Esse canteiro terá 36 unidades de área, mas deve apresentar o menor perímetro possível, pois o jardineiro quer cercá-lo e está com pouco dinheiro para comprar o material da cerca. Que forma ele deverá dar ao canteiro para conseguir o que deseja?

2. Uma creche ganhou tijolos suficientes para construir paredes que totalizem 32 unidades de comprimento. Com esses tijolos, a diretoria pretende construir uma sala de recreação. A dúvida é: que forma escolher, a fim de se obter a sala mais ampla possível (ou seja, a maior área) para as crianças. Vamos ajudar a diretora a resolver isso?

3. Os donos de uma academia de ginástica desejam construir uma pista coberta, para que os alunos possam correr nos dias de chuva. Eles querem que a pista seja retangular, com o maior comprimento possível e com área de apenas 36 unidades, a fim de não gastar muito com a cobertura. Qual a forma ideal para a pista?

São de grande importância as atividades com figuras planas relacionando área e perímetro. Geralmente imaginamos essas duas grandezas diretamente proporcionais, ou seja: se modificarmos uma figura plana qualquer, de modo que sua área aumente, seu perímetro também aumentará, na mesma proporção. Isso não é verdade, como mostram as atividades anteriores, porque a área é um produto das medidas entre os lados da figura, ao passo que o perímetro é a soma dessas medidas.

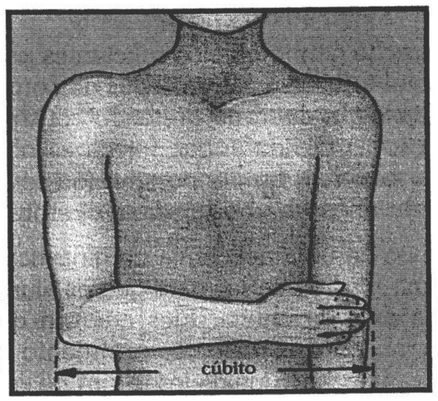
Medidas de comprimento com unidades padronizadas

Quando os alunos já tiverem incorporado o conceito de medida, trabalhando com unidades não-padronizadas, será possível introduzir as unidades-padrão. Deve-se principiar pelas medidas de comprimento.

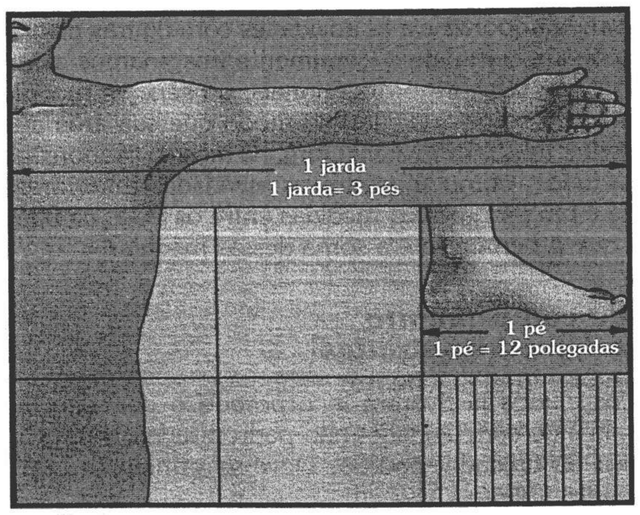
Nessa fase inicial, é importante explorar as unidades de medida conhecidas e utilizadas pelas pessoas no dia-a-dia: o metro, o centímetro e o quilômetro. As demais unidades são apresentadas apenas para demonstrar a analogia com o sistema de numeração decimal, uma vez que o metro se relaciona com seus múltiplos e submúltiplos em um processo de agrupamentos e trocas na base 10.

Pode-se iniciar o trabalho utilizando a mesma atividade empregada na construção do conceito de medida de comprimento (p. 254): medir a largura da classe, para construir um varal. Ao discutir como farão para ir à loja comprar o material, no tamanho necessário, os alunos concluirão que terão de levar consigo os instrumentos que cada grupo utilizou para fazer a medição: vareta, lápis, barbante, o colega que mediu a parede com seus palmos...

Logo as crianças percebem que esse não é um modo muito prático de fazer compras, e concluem como é importante haver unidades de medida que sejam conhecidas por todos.



Medida usada pelos antigos egípcios, o *cúbito* é a distância do cúbito (cotovelo) até o dedo médio.



Aproveitando a discussão, o professor introduz um breve relato sobre as dificuldades de comunicação dos nossos antepassados por causa do uso de padrões de medida variados. Pode falar sobre o *cúbito,* usado pelos egípcios (em época anterior a Cristo), que era a distância do cúbito (cotovelo) até a ponta do dedo médio. Como nem todos têm o braço com o mesmo comprimento, dá para imaginar as confusões que isso devia causar entre os comerciantes e outros profissionais que usavam medidas. Ele pode também citar as tentativas de se conseguir um único padrão, como as unidades inglesas *polegada*, *pé* e *jarda*, baseadas nas medidas do rei. Quanto mais o mundo se desenvolvia e cresciam as relações de comércio entre os povos, mais aumentava a confusão com as medidas.

Dependendo do nível de interesse da classe, o professor pode contar também a história da criação do metro.

Da Convenção do Metro ao criptônio

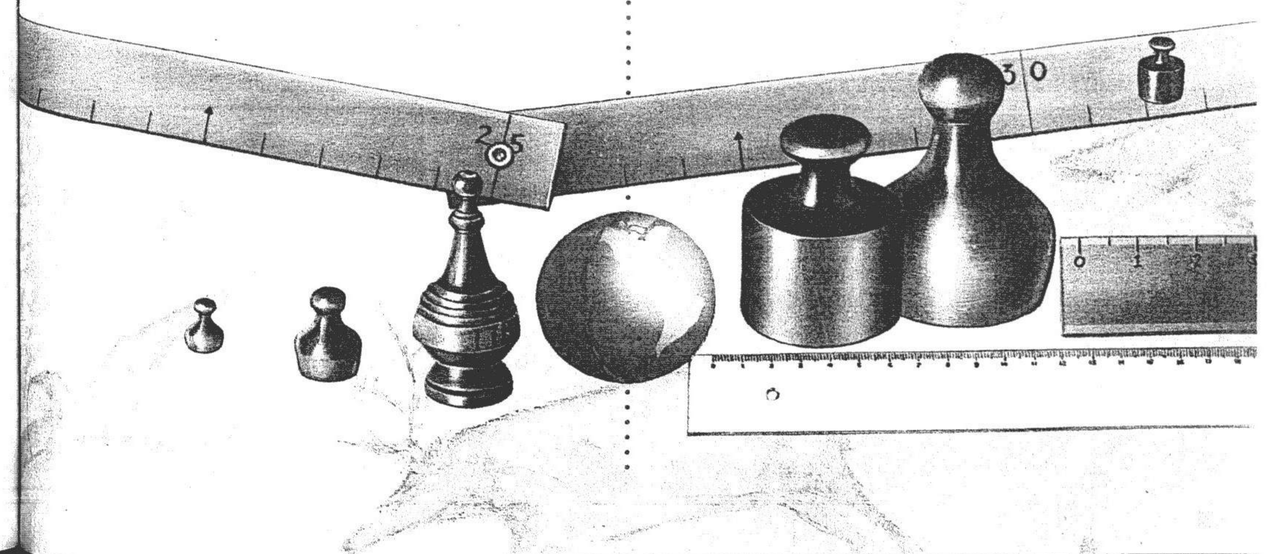
Em 1799, a França tomou a iniciativa de estabelecer um sistema de medidas com padrões invariáveis. Para unidade de comprimento, foi definido o *metro,* palavra derivada do grego *metron,* que significa "medida". Para que o metro fosse válido em qualquer local do mundo, ele não podia depender de um padrão substituível (como as medidas do rei). Assim, a Academia de Ciências francesa usou, para estabelecer o metro, a quarta parte do comprimento do meridiano terrestre, dividida por 10 milhões.

Fez-se uma barra de platina com esse tamanho, que foi guardada para servir de modelo. Como a platina é um metal que apresenta elevado ponto de fusão, não sofre variações de comprimento em temperatura ambiente.

Aos poucos, várias nações foram adotando esse padrão. Em 1875, dezenove países, entre eles o Brasil, assinaram a Convenção do Metro, no Bureau Internacional de Pesos e Medidas, em Paris. Cada um levou uma cópia da barra original, passando a adotar esse padrão em todas as medições de comprimento utilizadas nas transações dentro de seu território e com os países signatários da convenção.

Daí em diante, mais e mais países também foram aderindo à Convenção do Metro, nas reuniões periódicas feitas no Bureau Internacional de Pesos e Medidas, em Paris.

A partir de 1960, a definição do metro deixou de se apoiar na medida do meridiano (que não pode ser feita diretamente), passando a se caracterizar como um múltiplo do comprimento de onda do criptônio — gás nobre presente na atmosfera em proporção muito pequena. Esse comprimento de onda pode ser obtido em qualquer país e é perfeitamente fixo.



O professor pode, a essa altura, fazer um levantamento na classe para verificar o grau de familiaridade dos alunos com as unidades de medida, procurando saber que contato têm, em seu cotidiano, com medidas indicadas por unidades como metro, centímetro, quilômetro, litro, grama, quilograma e outras: para que servem?, onde se usam?, etc.

Atividades de aplicação do metro

É importante que os alunos se familiarizem com o comprimento representado por 1 m. Para tanto, o professor pode oferecer a cada criança um pedaço de barbante com essa medida e realizar com ele diversas tarefas.

Primeiro, o professor explica que esse é o tamanho correspondente a 1 metro — unidade — que pode ser indicada apenas por *m* (o comprimento do barbante fica, então, 1 m). A seguir, solicita que façam algumas medidas utilizando o pedaço de barbante. Por exemplo:

- o comprimento da mesa do professor;
- o comprimento da lousa;
- a altura de um colega;
- o comprimento do caderno;
- o comprimento da caneta;
- a altura da carteira;
- a largura da porta, etc.

É claro que será muito difícil os alunos encontrarem uma medida que seja exatamente 1 m. O professor pode sugerir que, lembrando do trabalho com frações, utilizem subdivisões do barbante. Em uma primeira etapa, eles marcam, com caneta hidrocor, o ponto correspondente à metade do barbante e, com outra cor, os pontos correspondentes à quarta parte. Feita cada uma das medidas, irão assinalando na tabela:

Medida / Objeto	Maior que 1 m	Maior que 1/2 do metro e menor que 1 m	Menor que 1/2 do metro e maior que 1/4 de metro	Menor que 1/4 de metro
Comprimento da mesa				
Comprimento da lousa				
Altura do colega				
Comprimento da caneta				

Atividades com os submúltiplos do metro

Decímetro

O passo seguinte consiste em identificar o submúltiplo decímetro. Os alunos continuam com seu barbante de 1 m, mas recebem agora um outro pedaço, medindo exatamente 1 dm

(ou 10 cm). Comparam os dois, para verificar quantas vezes o menor cabe no maior, fazendo novas marcas, com tinta de cor diferente das anteriormente usadas no barbante de 1 m.

Quando os alunos percebem que o novo barbante cabe 10 vezes, ou seja, o menor é a décima parte do maior, pode-se aproveitar para justificar o nome *decímetro*. Introduz-se também a abreviação *dm*, usada para simplificar as anotações. Na seqüência, os alunos preenchem uma nova tabela:

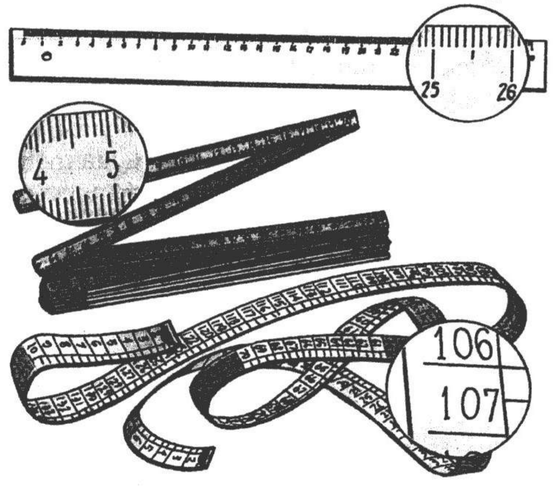
Comprimento do barbante	Valor em decímetros
1 m	
1/2 m	
1/4 de metro	
3/4 de metro	

Naturalmente, ao medir 1/4 de metro e 3/4 de metro com o decímetro, os alunos terão necessidade de dividir ao meio o pedaço de 1 dm, para obter 0,5 dm.

Centímetro

A identificação do centímetro é feita pela observação de alguns instrumentos de medir comprimento. Esses instrumentos são encontrados na própria escola ou trazidos de casa pelos alunos: fita métrica, trena, metro de madeira (aquele inteiro usado nas lojas de tecidos ou o tipo dobrável dos marceneiros), a régua comum (de 30 ou 50 cm) e a régua grande da escola.

Comparando cada instrumento com o barbante de 1 m, os estudantes verificam que alguns são maiores que o barbante, como a trena e a fita métrica; outros são iguais, como a régua grande da escola ou o metro de madeira; outros, ainda, são menores, como as réguas que utilizam.



Quase imediatamente as crianças observam que há números em todos os instrumentos. Examinando esses números com maior atenção, percebem que eles correspondem a subdivisões de mesmo tamanho; e de mesmo tamanho não apenas em cada um dos instrumentos, mas entre todos, quando comparados.

Dependendo do instrumento, os números chegam a 30 (na régua pequena), a 100 (no metro de loja), a 150 (na fita métrica), etc.

Comparando cada um dos instrumentos com o barbante de 1 dm, os alunos irão verificar que, em todos, o comprimento do barbante corresponde ao número 10, e que cada 1 dm é subdividido, por sua vez, em 10 partes.

Portanto, em cada 1 m há 100 dessas subdivisões (10 × 10), ou seja, cada uma é a centésima parte do metro — daí o nome *centímetro* (cuja abreviação é *cm*). Temos, então:

1 metro = 10 decímetros = 100 centímetros
ou
1 m = 10 dm = 100 cm

Pode-se fazer um levantamento na classe para saber quem já ouviu, em casa ou em outros locais, pessoas se referindo a decímetros ou a centímetros. Com certeza, vários alunos terão ouvido falar em centímetros e quase nenhum em decímetros. O professor poderá comentar que isso acontece porque, no nosso cotidiano, algumas unidades são mais utilizadas que outras.

Nesse momento, os alunos serão convidados a escolher, entre os objetos medidos na atividade sobre o metro, aqueles que são mais adequados para se medir em centímetros. Fazem essas medições, bem como as de outros objetos de sua escolha, e em seguida preenchem a tabela:

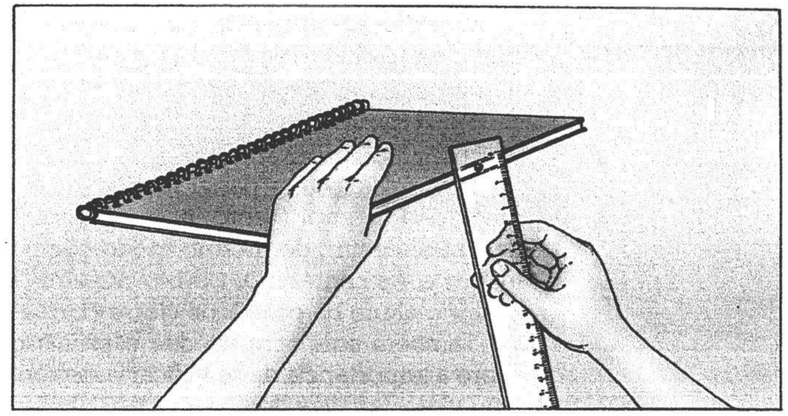
Objeto	**Medida em centímetros**
Comprimento da mesa do professor	
Altura do colega	
Comprimento do caderno	
Comprimento da caneta	

Outro tipo de medição que agora pode ser feito é da parte fracionária das medidas que não foram expressas em números inteiros na atividade sobre o metro. Por exemplo: a altura de uma menina da classe é 1 m e "quase a metade do metro".

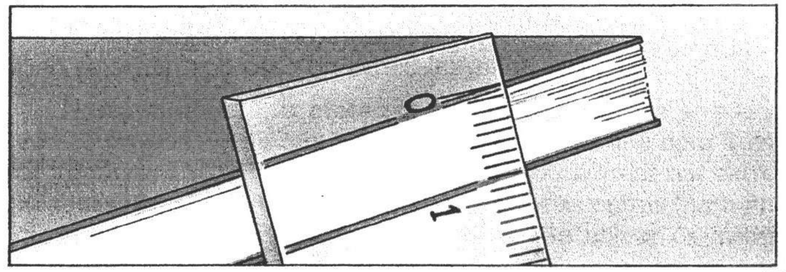
No barbante de 1 m, os alunos fazem novamente essa medida e marcam o pedaço citado. Dessa vez, usando a fita métrica, poderão expressar a medida desse pedaço em centímetros. Suponhamos que o pedaço meça 43 cm; os alunos concluirão que a menina mede 1 m e 43 cm de altura.

Milímetro

Para ajudar os alunos a compreender o que o milímetro representa, o professor pede aos alunos que meçam, por exemplo, a espessura do caderno.



Muitos cadernos têm menos de 1 cm de espessura. O professor solicita aos donos desses cadernos que contem quantos dos "pedacinhos" existentes dentro de 1 cm foram ocupados. Vamos supor que sejam 8.



Portanto, a espessura do caderno é de 8 dessas unidades. O professor incumbe a classe de fazer uma análise desses pedaços para descobrir seu nome.

Primeiro, os alunos percebem que há 10 unidades desse tipo dentro de cada centímetro; depois, solicitados pelo professor, verificam quantas delas existem em 1 m. Muitos rapidamente observam que são 1000 unidades porque 1 m tem 100 cm e cada centímetro tem 10 dessas unidades.

Portanto, serão 100 × 10, ou 1 000 unidades em 1 m.

Assim, os alunos descobrem que cada unidade é a milésima parte do metro, recebendo por isso o nome de *milímetro* (cuja abreviação é *mm*).

Pode-se pedir aos alunos que pesquisem (em casa, na escola, nas casas de comércio, etc.) objetos ou produtos medidos em milímetros.

A relação entre as unidades

Uma boa atividade que se pode propor à classe nesse momento é pesquisar, em jornais ou revistas, notícias envolvendo as unidades de medida de comprimento trabalhadas até aqui.

O professor aproveita para enfatizar a relação decimal que existe entre elas:

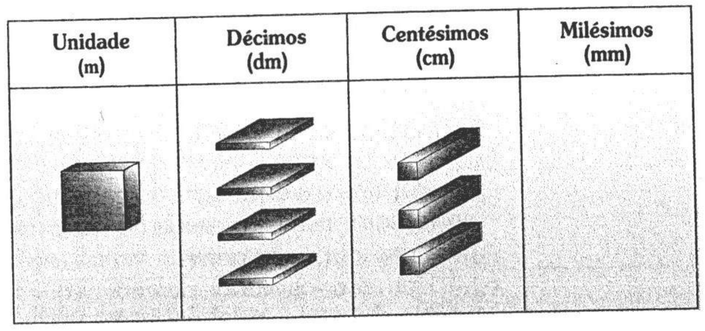
10 mm = 1 cm 10 cm = 1 dm 10 dm = 1 m

Essa relação tem papel fundamental na representação das medidas de comprimento, pois ela permite o uso dos números decimais. Assim, do mesmo modo que podemos representar 1 inteiro e 43 centésimos com o número 1,43, podemos representar a altura da colega de classe (1 m e 43 cm) por 1,43 m.

Também aqui convém que o professor retome a discussão sobre a importância de se indicar o instrumento que serviu como unidade de medida, lembrando aos alunos que a unidade utilizada na medição deve ser indicada ao final do número.

Em nosso exemplo, a altura da menina foi medida com o barbante de 1 m; então, essa é a unidade que deve ser indicada. Se tivéssemos utilizado a fita métrica, com a leitura feita diretamente nos números correspondentes aos centímetros, a altura seria indicada por 143 cm.

A representação de medidas nas diversas unidades pode ser feita, tal como no caso dos números decimais, com auxílio do ábaco.



A vírgula estará localizada na casa da unidade principal citada. Por exemplo:

- 14 mm (a unidade principal aqui é o milímetro, mas o 1 fica na casa dos centímetros, pois 10 mm valem 1 cm);
- 31 cm e 5 mm (do mesmo modo, o 3 está na casa dos decímetros, enquanto a vírgula fica na casa dos centímetros, pois essa é a principal unidade citada);
- 1 m e 34 cm (o 3 está na casa dos decímetros, pelo mesmo raciocínio dos agrupamentos de 10 em 10);
- 23 m e 6 cm (aqui, a unidade principal citada é o metro; então, a vírgula estará nessa casa; o 2 ocupará a casa dos decâmetros, pois são 2 grupos de 10 m e cada 10 m valem 1 dam como veremos a seguir; na casa dos decímetros, será colocado um zero, pois temos apenas 6 cm, que não formam um grupo de 10 unidades).

Vejamos isso em uma tabela:

	m	dm	cm	mm
	1,	4	3	
	1	4	3, *	
			1	4, *
		3	1,	5
	1,	3	4	
2	3,	0	6	

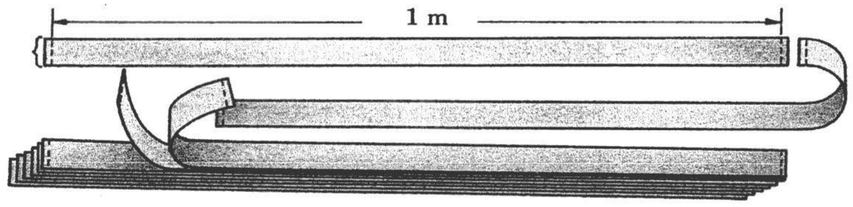
* A vírgula aqui é desnecessária, uma vez que não há casas depois dela.

Atividades com os múltiplos do metro

Decâmetro

Para introduzir o decâmetro, o professor pede aos alunos que escolham um instrumento para medir o comprimento do corredor ou de um muro do pátio da escola. Certamente, nenhum escolherá a régua menor. Porém, mesmo usando a trena ou a fita métrica, eles perceberão a necessidade de empregar unidades maiores.

Nesse momento, o professor sugere que a classe se divida em 10 grupos. Cada grupo faz uma tira de cartolina com 4 cm de largura e 1 m de comprimento, deixando margens nas extremidades para colar depois as 10 tiras umas às outras (para encontrar essas medidas, as crianças já deverão utilizar os instrumentos adequados).



Coladas as tiras, os alunos obterão uma unidade de medida mais adequada para fazer a medição solicitada. Feita a medição, discutem os resultados do trabalho.

Em primeiro lugar, o professor propõe aos alunos que tentem descobrir qual seria o nome dessa tira, considerando seu valor. Alguns alunos costumam referir-se ao prefixo *deci*, mas logo percebem que ele serviu para indicar a décima parte. Às vezes, um ou outro aluno se recorda do prefixo *deca,* dos gregos, que eles já usaram para os polígonos e poliedros de 10 lados (decágono) e 10 faces (decaedro), respectivamente. Se ninguém se lembrar, o professor se encarregará de passar o nome da unidade de 10 m: *decâmetro,* cuja abreviação é *dam*.

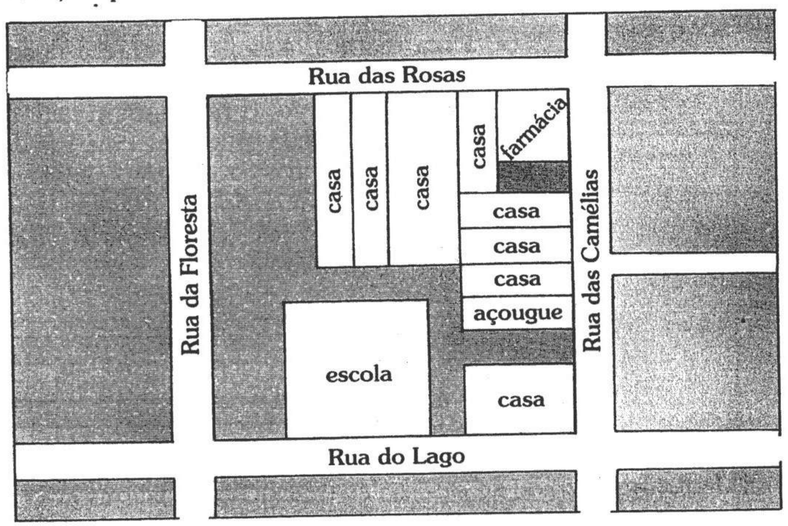
Retomemos o início da atividade. Vamos supor que a medida do corredor tenha sido uma tira grande e mais 6 m. O pro-

fessor pede que os alunos descubram um modo de indicar isso. Podem surgir respostas como 16 m ou 1 dam e 6 m. Se, tal como se fez com a altura da colega em outra atividade, o professor pedir que usem um número decimal para essa representação, alguns alunos podem chegar à solução: 1,6 dam.

Quando ninguém descobre a resposta, o professor pode apresentá-la, mas sem insistir muito nela, pois talvez os alunos ainda não tenham maturidade suficiente para compreendê-la. Nesse caso, serão necessárias outras atividades até que os alunos desenvolvam esse tipo de representação.

Hectômetro

Na apresentação do hectômetro, é interessante convidar os alunos para uma volta no quarteirão da escola. Antes, porém, fazem um levantamento dos elementos que ele contém. Cada aluno representa o quarteirão num desenho, acrescentando o máximo de detalhes que conseguir lembrar, como os nomes das ruas, os prédios ou outros locais de destaque.



Ao discutir os trabalhos, os alunos concluirão que a figura geométrica representada é um quadrilátero, formado por representações de trechos de quatro ruas. A seguir, o professor pergunta que distância eles imaginam que irão percorrer no passeio — questionando a respeito do tipo de medição que está sendo pedido, se a área ou o perímetro do quadrilátero.

Depois de alguns palpites — que o professor irá escrever na lousa —, é interessante explicar que, em geral, cada quadra (trecho de rua) que compõe o quarteirão costuma medir 100 m. Isso pode ser verificado, mais ou menos, pela numeração das casas. Se a primeira casa da quadra tiver o número 302, geralmente a última casa, na esquina seguinte, terá um número próximo de 402.

No passeio, os alunos podem levar seus desenhos, para conferir e completar as informações. Além disso, podem marcar a numeração das casas que ficam nos extremos de cada quadra. Outra sugestão é levar a tira de 1 dam e verificar se é apropriada para medir o quarteirão. Com toda certeza os alunos irão constatar que ela é muito pequena para isso.

De volta à classe, enquanto estiverem discutindo a questão do decâmetro, o professor aproveita para introduzir o *hectômetro* (cuja abreviação é *hm*) e representar o comprimento de uma quadra:

$$1\ \text{hm} = 10\ \text{dam}$$
$$1\ \text{hm} = 100\ \text{m}$$

A seguir, o professor pede aos alunos que representem em hectômetro o comprimento do quarteirão todo (ou *perímetro do quadrilátero*) e explica que essa unidade de medida quase não é usada no Brasil.

Quilômetro

Para trabalhar com o quilômetro, é interessante que os alunos falem de suas experiências em viagens: locais que conhecem, para onde foram nas últimas férias, quantas horas durou a viagem e se eles já ouviram falar em quilômetros.

A seguir, o professor retoma tudo o que foi feito até o momento, explicando aos alunos que eles poderiam fabricar uma "supertira" com 10 pedaços de 1 hm. Essa supertira seria o *quilômetro* (*quilo* vem do grego e significa "mil"), cujo símbolo é *km*, pois os gregos escreviam *quilo* com *k*.

Novamente, é importante ressaltar a relação decimal entre as unidades de medida:

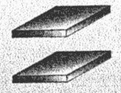
$$10\ \text{m} = 1\ \text{dam} \quad 10\ \text{dam} = 1\ \text{hm} \quad 10\ \text{hm} = 1\ \text{km}$$

Ou, ainda:

$$1\ \text{km} = 10\ \text{hm} = 100\ \text{dam} = 1000\ \text{m}$$

É essa relação que permite, também aqui, usar os números decimais para representar as medidas. Por exemplo:

- 1 km e 200 m pode ser representado por 1,200 km. Como a maior unidade referida foi o quilômetro, a vírgula fica nessa casa. Mas também pode ser indicado por 1,2 km, conforme vimos no capítulo sobre números decimais.

Unidade (m)	Décimos (dm)	Centésimos (cm)	Milésimos (mm)
			

- 2 345 m pode ser representado por 2,345 km. Como a unidade de referência deixa de ser metro e passa para quilômetro, a vírgula deve ficar nessa casa.
- 3 km e 47 m pode ser representado por 3,047 km. Como o quilômetro é a maior unidade citada, a vírgula vai para essa casa.
- 23 km pode ser representado por 23 000 m. O algarismo 2 representa 2 dezenas de quilômetros; a vírgula, que estava na casa dos quilômetros, passa então para a casa dos metros, pois queremos usar o metro como unidade de referência. Uma vez que não há casas ocupadas depois dos metros, a vírgula pode ser eliminada.

Acompanhe tudo isso numa tabela:

dezenas por km	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
	1,	2	0	0			
	2,	3	4	5			
	3,	0	4	7			
2	3,	0	0	0			

Nessa etapa, não consideramos necessário o trabalho exaustivo com reduções de unidades. Algumas delas são totalmente desvinculadas da realidade, como a redução de quilômetros a centímetros, ou vice-versa. Na vida prática, essa conversão raramente é realizada.

Insistimos, também, que não há necessidade de enfatizar o trabalho com unidades que não são utilizadas no dia-a-dia, como o decâmetro e o hectômetro. Elas são apresentadas apenas para ressaltar a relação decimal entre as unidades de medida de comprimento.

Outras atividades que podem ser realizadas pelos alunos:

- Quantas voltas precisamos dar em torno do quarteirão para percorrer 1 km?
- Como podemos representar o comprimento do quarteirão em metros? E em quilômetros?

Trabalhando com escalas

Para desenvolver a noção de escala, é possível fazer um trabalho integrado com geografia, explorando mapas, plantas e gráficos. As atividades com escalas envolvem proporcionalidade e são por isso muito úteis para favorecer o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Vejamos algumas sugestões.

Primeiro, a classe retoma e aprimora a representação do quarteirão. O professor propõe as seguintes questões como ponto de partida:

a) O desenho é muito menor que o tamanho real do quarteirão. Como se pode entender, então, esse "tamanho real"?

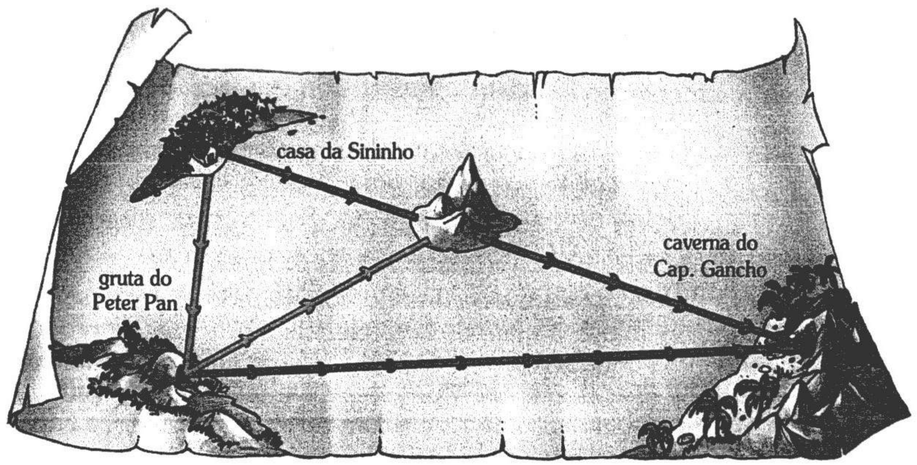
b) As ruas foram representadas do mesmo tamanho (mais ou menos 100 m cada uma)?

c) Em que ponto da quadra está a escola: no meio, mais perto do início ou mais perto do fim?

d) Qual a localização de outros pontos importantes do quarteirão?

Depois de uma discussão em classe, o professor explica que, para elaborar plantas e mapas, os técnicos utilizam escalas, isto é, representam um comprimento real por um "comprimento simbólico".

Em seguida, pode-se oferecer aos alunos um mapa, como o da Terra do Nunca da história de Peter Pan. Nesse mapa, cada 1 km percorrido será representado por 1 cm.



Os alunos deverão analisar o mapa, fazendo medições com a régua, e responder às questões:

a) Qual é a distância entre a casa da fada Sininho e a gruta de Peter Pan?

b) Quantos quilômetros Peter Pan deve percorrer para encontrar a caverna do Capitão Gancho? Como se pode ver, há duas rotas para chegar lá. Escolha a mais curta.

Realizada a atividade, os alunos retomam a planta do quarteirão, planejando uma escala para a nova representação.

O professor pode orientar a classe com algumas sugestões, tais como: representar cada 1 m por 1 cm; representar cada 10 m por 1 cm; representar cada 20 m por 1 cm.

Lembrando que o quarteirão mede 100 m, os alunos poderão verificar as sugestões do professor para checar se a figura caberá no papel ou se ficará muito pequena, até chegarem a uma boa escala para a representação.

Após esse trabalho, as crianças já podem analisar alguns mapas ou representações de percurso, observando a escala utilizada em cada um:

a) no guia ou planta da cidade, o trecho do bairro em que está a escola, procurando localizá-la; seria interessante que cada grupo tivesse nas mãos uma cópia para isso;

b) num guia de viagens, um percurso que parta da sua cidade, ou de qualquer outra, até um local escolhido pela classe;

c) no mapa do estado, a localização da cidade em que fica a escola.

Medidas de capacidade

O trabalho com as medidas de capacidade, da 3ª à 5ª série, pode ser realizado com atividades bastante próximas do cotidiano dos alunos: situações de compra, de observação de embalagens de produtos ou bulas de remédios, de elaboração de receitas de alimentos, etc.

Conforme observado na seção anterior, é totalmente desaconselhável o trabalho exaustivo com unidades de medida desconhecidas ou desprezadas nas transações comerciais do cotidiano, como, por exemplo, decalitro, centilitro, etc.

O litro

Para essa fase do aprendizado, o professor pede aos alunos que tragam de casa embalagens vazias de produtos como refrigerantes, remédios, produtos líquidos de limpeza, de higiene pessoal, etc. Com esse material, eles fazem uma observação das embalagens, à procura de indicações de sua capacidade, e anotam as medidas encontradas. As mais comuns são 1 ℓ, 5 ℓ, 400 mℓ, 1 250 mℓ, 250 mℓ, 120 mℓ, 30 mℓ.

Em seguida, o professor explica aos alunos o significado do termo *capacidade* (a propriedade que tem um recipiente de conter alguma coisa) e dos símbolos:

ℓ é a abreviação do litro (ou de litros)
mℓ é a abreviação de mililitro (ou mililitros)

A compreensão do mililitro fica facilitada pela analogia com o metro, seus múltiplos e submúltiplos. Pode-se apresentar uma tabela semelhante à que foi usada para as medidas de comprimento, explicando cada nome:

Múltiplos do litro		**Submúltiplos do litro**	
Quilolitro (kℓ)	1 kℓ = 1000 ℓ	Mililitro (mℓ)	1 mℓ = 1/1000 do ℓ
Hectolitro (hℓ)	1 hℓ = 100 ℓ	Centilitro (cℓ)	1 cℓ = 1/100 do ℓ
Decalitro (daℓ)	1 daℓ = 10 ℓ	Decilitro (dℓ)	1 dℓ = 1/10 do ℓ

pℓ	hℓ	daℓ	ℓ	dℓ	cℓ	mℓ
1	0	0	0			
	1	0	0			
		1	0			
			1			
			0,	1		
			0,	0	1	
			0,	0	0	1

Também aqui, o professor informa aos alunos que no Brasil só se costuma trabalhar com litros e mililitros.

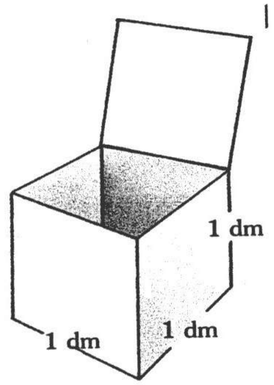
Agora já podem ser feitas experiências de medição com diversas vasilhas, usando diferentes materiais, como arroz, areia, água, pó de serragem, ou qualquer outro que possa ser transferido com facilidade de um recipiente para outro. Acompanhe os exemplos.

Para descobrir a capacidade de um copo comum, os alunos verificam quantos copos cheios (de arroz, água, etc.) são necessários para encher um dos recipientes de 1ℓ. Em geral são 4 copos. Assim, observam que a medida de cada copo é 1/4 de litro, ou 1/4 de 1000 mℓ, o que dá 250 mℓ.

O mesmo pode ser feito com recipientes bem pequenos, como copinhos plásticos de café, vidros de perfume e de remédio, xícaras de café, cálices. Agora, os alunos passam o conteúdo desses recipientes para outro de capacidade conhecida porém menor que 1ℓ. No caso, usam o de 30 mℓ. Naturalmente, é possível fazer o contrário: passar o conteúdo do vidro de 30 mℓ para a xícara, por exemplo.

Se houver na escola uma caixa d'água acessível aos alunos, eles poderão medir suas dimensões (comprimento, largura e altura) e informar-se sobre quantos litros de água cabem ali. A tarefa seguinte será descobrir qual a capacidade da caixa de sua casa e, se possível, tomar as medidas, para compará-las com as da caixa examinada antes.

Depois dessa discussão, o professor pode sugerir que, com esquadro e régua, construam o molde de um cubo, com quadrados de 10 cm (ou 1 dm) de lado, de preferência em cartolina. Em seguida recortam e montam o cubo, deixando uma das faces sem colar, como uma tampa.



A seguir, o professor pede aos alunos que façam uma estimativa da medida de capacidade desse cubo e depois repitam a experiência de medição usando algum dos recipientes de medida conhecidos. Eles irão verificar que essa medida é 1 ℓ. O professor pode informar aos alunos que o cubo representa 1 decímetro cúbico (dm^3). Nesse momento, é apenas uma informação, o início da familiarização com a idéia, porque as unidades de medida de volume serão trabalhadas apenas na 5ª série.

Caso tivessem construído um cubo com arestas de 1 m, ele representaria 1 metro cúbico ($1\ m^3$) e nele caberiam 1 000 ℓ de água.

LEMBRE-SE

Capacidade é a propriedade que tem um recipiente de conter alguma coisa. Volume é a medida do espaço ocupado por um corpo tridimensional. A unidade de medida de capacidade é o litro, e a de volume é o metro cúbico. Entretanto, graças à relação aqui apresentada ($1\ \ell = 1\ dm^3$), é possível expressar a capacidade por meio de metro cúbico.

Medidas de massa

As medidas de massa também devem ser trabalhadas no contexto do conhecimento dos alunos. Um modo interessante de iniciar o trabalho é fazer o levantamento e o registro de quanto pesa cada aluno, o que pode ser aproveitado para a organização de uma tabela. A maioria das crianças sabe o próprio peso.

A seguir, o professor pode perguntar se elas conhecem outras coisas que são medidas pelo peso. Ao registrar os exemplos, separa em duas colunas o que é indicado por quilos e o que é indicado por gramas. É comum, em algumas classes, surgir uma terceira coluna: a das toneladas. Nada a estranhar, pois trata-se de um termo que a criança costuma ouvir de adultos ou nos noticiários da televisão sobre produção agrícola, carregamentos de navios ou de caminhões.

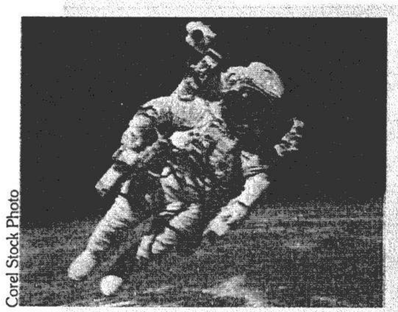
PESO E MASSA

Quando tratamos com medidas de massa, acabamos falando também em peso, como se as duas grandezas fossem sinônimos. Na verdade, isso acontece porque a maioria das pessoas utiliza indiscriminadamente os dois termos e, com alunos de curso básico, não há condições de aprofundar o assunto.

Massa é a quantidade de matéria que um corpo possui, e mantém-se sempre a mesma, qualquer que seja o local onde o corpo se encontre.

Já o peso representa a força com que a terra atrai um corpo, e está relacionado à força da gravidade:

peso = massa × aceleração da gravidade


Corel Stock Photo

Assim, o peso apresenta variação, conforme a localidade em que o corpo se encontra; quanto mais próximo do centro da Terra, maior será o peso de um corpo. Por exemplo, uma pessoa pesa menos nas proximidades do equador do que perto dos pólos, do mesmo modo que pesa mais quando está à beira-mar do que no pico de uma montanha (embora essa diferença seja bem pequena).

Sabemos que, no espaço, o peso de um astronauta é nulo, mas sua massa permanece a mesma. Isso porque, pela grande distância do centro da Terra, deixa de haver a influência da gravidade.

As balanças que normalmente usamos comparam massas (o que fica bem claro nas balanças de dois pratos). Então, o que está sendo medido é a nossa massa, e o correto seria dizer: "Minha massa é tantos quilogramas", e não como normalmente se fala: "Meu peso é...".

O grama

Para introduzir o *grama*, o professor pode solicitar aos alunos que tragam de casa algumas embalagens ou bulas de remédio, em que aparecem as dosagens dos componentes. Aí será encontrada a indicação *mg*, que o professor explicará tratar-se de *miligrama*, recordando que o prefixo *mili* representa a milésima parte de alguma unidade, no caso o grama. Também é oportuno enfatizar o gênero masculino — *o* grama.

A próxima atividade pode ser uma visita a um supermercado, para pesquisar o peso de alguns produtos, desde os mais leves aos mais pesados. É interessante que se tenha em classe um pacote de 1 kg de um produto qualquer e outro de 50 g ou 100 g, para serem comparados com os objetos da classe em relações como "mais leve" e "mais pesado".

A discussão a respeito de balanças surge naturalmente e é possível, nesse momento, pesquisar os tipos mais conhecidos e experimentar as que forem mais acessíveis:

- a de dois pratos, em que o objeto a ser pesado é comparado com um peso conhecido, colocado no outro prato;
- de ponteiro, em que não se vê o mecanismo da medição; é comum nas farmácias;
- digital, que as crianças também já devem ter visto em farmácias; o número surge num mostrador;
- de peso cilíndrico que desliza em uma escala até que o braço da balança fique equilibrado; comum nos consultórios médicos e na sala de educação física;
- eletrônicas, mais sofisticadas, com visor digital, de açougues ou supermercados, que marcam o peso e o preço do produto pesado.

APRESENTAÇÃO DAS UNIDADES DE MEDIDA

As unidades de medida padronizadas para massa (o grama, seus múltiplos e submúltiplos) podem ser apresentadas, como no caso das medidas de capacidade, em analogia com as medidas de comprimento, novamente pelo fato de estarem em um sistema de agrupamentos e trocas na base 10.

O professor apresenta a tabela de valores tal como fez nos casos anteriores:

Múltiplos do grama	Submúltiplos do grama
Decagrama (dag) = 10 g Hectograma (hg) = 100 g Quilograma (kg) = 1000 g Tonelada (t) = 1000 kg ou 1 000 000 g	Decigrama (dg) = 1/10 do grama Centigrama (cg) = 1/100 do grama Miligrama (mg) = 1/1000 do grama

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
1	0	0	0			
	1	0	0			
		1	0			
			1			
			0,	1		
			0,	0	1	
			0,	0	0	1

Convém chamar a atenção dos alunos para o fato de que, por uma simplificação de linguagem, usa-se a forma reduzida *quilo* para indicar a unidade que se chama *quilograma*. Também é interessante retomar a questão das unidades que praticamente não são utilizadas no dia-a-dia — como o decagrama, o hectograma e centigrama. Pode-se mencionar também que o

miligrama somente é empregado em meios especializados, como medicina e farmácia, em que se costuma lidar com quantidades muito pequenas de produtos. Já a tonelada é utilizada nas áreas que trabalham com produtos em grandes quantidades.

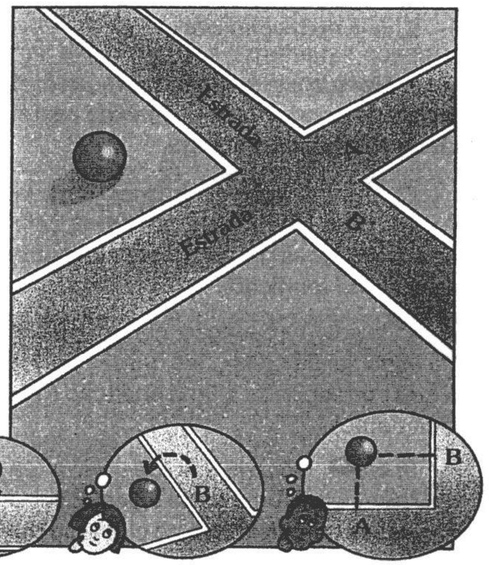
Convém citar, ainda, a arroba, muito empregada por nossos antepassados e ainda hoje usada no setor agropecuário. Essa unidade de massa vale 15 kg e seu símbolo é @.

Alguns alunos costumam observar que, em certas embalagens, aparecem as expressões *peso bruto* e *peso líquido*. Nesse caso, deve-se explicar de que se trata: peso bruto é o peso do produto juntamente com o da embalagem; peso líquido refere-se unicamente ao peso do produto, sem levar em conta o recipiente.

Leitura COMPLEMENTAR

[Devagar e sempre]

Uma criança poderá localizar um objeto num desenho considerando a proximidade em relação a alguma coisa. Exemplo: "Ele está perto (próximo) da estrada A". Outra dirá: "Ele está à esquerda da estrada B". Uma terceira criança poderá localizar o objeto considerando a *distância* dele às bordas do desenho ou, então, em relação às duas estradas.

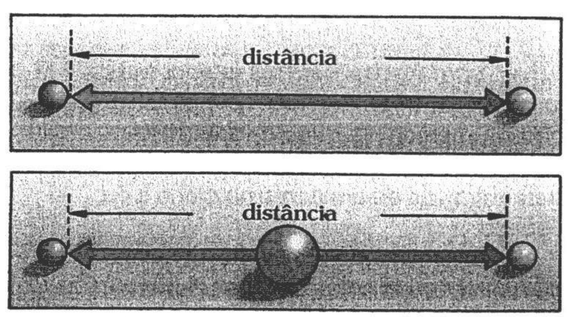


A primeira criança utilizou para a localização relações topológicas (vizinhança); a segunda usou relações projetivas (noção de esquerda) e a terceira, relações euclidianas ou métricas (noção de distância, eixos de coordenadas). As relações euclidianas ou métricas têm como base a noção de distância e permitem *situar os objetos uns em relação aos outros considerando um sistema de referência fixo*.

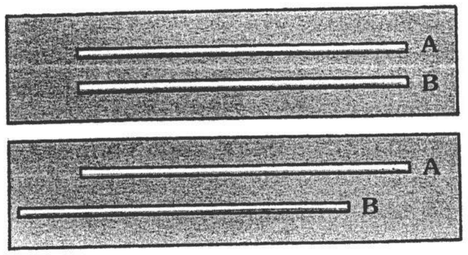
O sistema de coordenadas corresponde ao ponto de chegada de toda a construção psicológica do espaço euclidiano. Pode-se dizer que, para chegar a este nível de compreensão do espaço euclidiano, a criança deverá ter adquirido:

1. *A conservação de:*

• *Distância.* Dizemos que a criança tem conservação de distância quando dados dois pontos fixos (A e B) e, colocando-se um objeto entre eles, a criança considera que a distância entre A e B continua a mesma.



A criança que não tem a conservação da distância acredita que agora, a distância entre A e B aumentou.



• *Superfície.* A conservação de superfície é identificada quando a criança, diante de dois cartões idênticos, em que se coloca um mesmo número de casinhas iguais, embora em um cartão as casas estejam dispersas e, no outro, aglomeradas, compreende que a superfície do terreno é a mesma em A e B.

2. A *construção de:*

• *Medida de comprimento* (uma dimensão). A construção da medida espontânea é feita por etapas:

1ª etapa. A visão de um todo em suas partes com compreensão do encaixe possível dessas partes, umas nas outras ou no todo (partição).

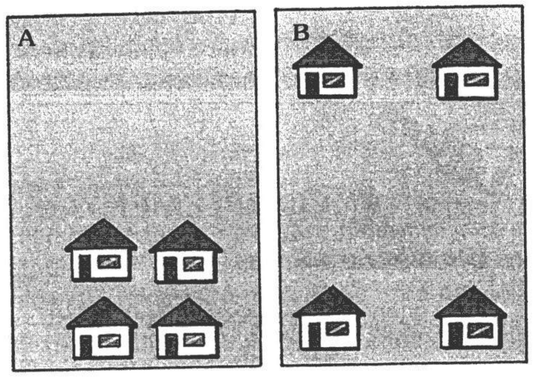
2ª etapa. Ordenação numa seqüência espacial das posições dessas partes, o que corresponde a uma seriação (deslocamento).

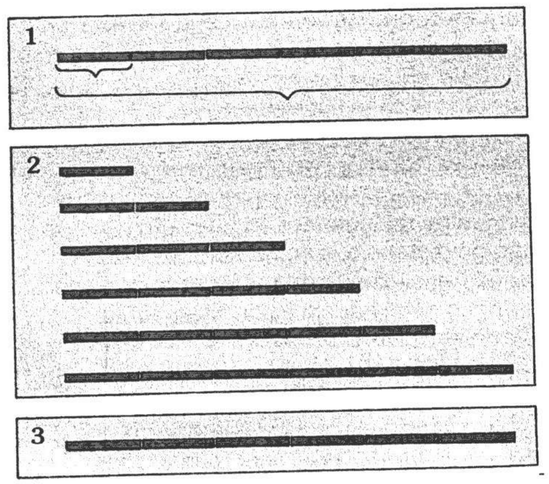
3ª etapa. Constituição de uma unidade, escolhendo uma parte e deslocando-a sucessivamente sobre as outras, o que constitui síntese da partição e do deslocamento.

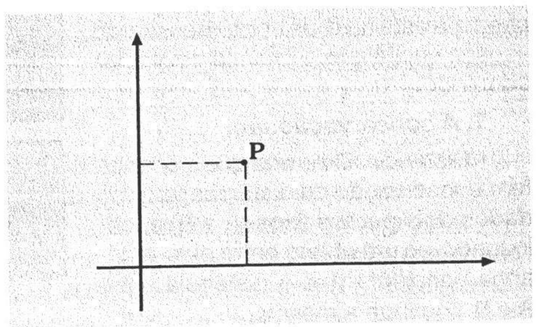
• *Coordenadas métricas retangulares* (uma, duas, três dimensões). A construção da medida de duas ou três dimensões surge como conseqüência da determinação de um ponto no plano e no espaço.

A determinação do ponto no plano ou no espaço implica, necessariamente, *a elaboração de um sistema de coordenadas* dado por dois eixos.

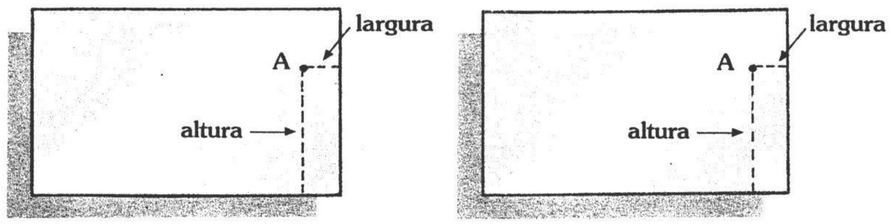
• *Comprimento.* Dizemos que a criança tem conservação do comprimento quando, diante de duas varetas de igual comprimento, cujas extremidades coincidem (A ≡ B) e, em seguida, das mesmas varetas, estando uma deslocada (B deslocada à esquerda, por exemplo, de sua posição), a criança, a partir de 6 anos, percebe que ambas têm ainda o mesmo comprimento, apesar do deslocamento.







Dizemos que uma criança localiza operatoriamente em duas dimensões quando, ao receber duas folhas em branco e um ponto em uma delas (A) — lado direito em cima — e solicitamos que localize o ponto na outra folha (B), ela considera as duas dimensões (altura e largura) para a determinação da posição do ponto, tendo como referências os lados dos retângulos.



A coordenação das medidas (ponto no plano ou no espaço) implica um sistema de correspondência biunívoca (matriz de dupla entrada). A localização absoluta é dada pela utilização de um sistema de coordenadas métricas, cuja construção é demorada, requerendo todo um trabalho básico que se inicia na 1ª série, com construção da medida espontânea, conservação da distância e do comprimento e, nas últimas séries da primeira fase, com a construção de um sistema de coordenadas.

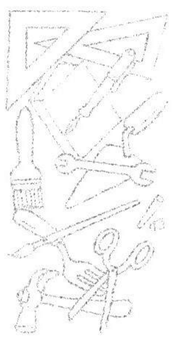
Entre 9 e 10 anos, aproximadamente, a criança coordena as medidas de duas ou três dimensões e utiliza as referências naturais (horizontal e vertical) que garantem a construção do sistema de coordenadas. Não é, pois, a simples percepção dos eixos de coordenadas no próprio corpo que garante a formação do sistema de coordenadas; ele é construído etapa por etapa.

(Adaptado de: PAGANELLI, Tomoko I. et alii. Como se constroem relações espaciais. *Revista do Professor.* Porto Alegre, CPOEC, jan./mar. 1987, p. 20-2.)



Como exercício de aplicação, verifique informalmente com crianças das séries iniciais se as relações métricas de distância, comprimento, superfície e construção de coordenadas métricas retangulares estão conservadas. Utilize o texto acima como roteiro para a observação.

Para você fazer



1. Realize com seu grupo as atividades apresentadas no capítulo para o trabalho com o conceito de área de uma superfície. Na seqüência, analise-as sob o ponto de vista pedagógico, assinalando as dificuldades que o aluno poderá ter, os conceitos já adquiridos e que deverão ser utilizados, as semelhanças e diferenças entre essas atividades e aquelas relativas ao conceito de *comprimento*.
2. Procure trabalhar as atividades mencionadas acima com um grupo de crianças de 4ª e/ou 5ª série. Analise a atuação das crianças.

3. Crie nova atividade sobre cálculos de áreas, utilizando papel quadriculado.

4. Resolva as atividades a seguir, avaliando seu nível de adequação para crianças entre a 3ª e a 4ª série. Escolha as atividades que julgar convenientes e aplique-as a crianças dessa fase escolar. Assim, você poderá conferir sua avaliação com o desempenho real dos estudantes.

   a) Numa receita de doce é preciso usar 3/4 de litro de creme. No supermercado, só há embalagens de 300 mℓ, ao preço de R$ 1,70 cada; ou garrafas de meio litro, que custam R$ 2,50 cada. Ajude dona Rosa a decidir qual a compra mais adequada para fazer sua receita com economia.

   b) André, Beto e Celso subiram juntos na balança da farmácia. Ela marcou 144,5 kg. Então André desceu da balança, que passou a marcar 99,2 kg. Depois foi a vez de Beto descer, e Celso disse: "Eu peso 48 quilos e 200 gramas".

      Qual o peso de cada amigo?

   c) No zoológico, um filhote de elefante pesa 1,5 t; a girafa pesa 650 kg e um búfalo pesa 30 @. O elefante pesa mais que o triplo do peso do búfalo? A girafa pesa mais que a metade do peso do elefante?

   d) Um farmacêutico deve aviar uma receita em que se pede para colocar 32 mℓ de uma substância, 120 mℓ de outra e completar 1/4 de litro com soro fisiológico. Que quantidade de soro fisiológico será colocada?

   e) Sabemos que 1ℓ de água pesa 1 kg e um ℓ de gasolina pesa 700 g. Se misturarmos 5 ℓ de gasolina com 1,5 ℓ de água, colocando a mistura em um vasilhame que pesa 250 g, qual será o peso bruto desse produto? E o peso líquido?

   f) Aproveitando ofertas, o senhor Alfredo comprou 1,5 kg de carne, 5 kg de batatas, 2 kg de feijão. Ele está com R$ 20,00 na carteira. Será que dará para ele levar também 250 kg de queijo mineiro? Verifique o preço de cada produto na tabela abaixo.

Queijo mineiro: R$ 6,00 o quilo
Cebola: 2 kg por R$ 1,80
Carne de 1ª: R$ 5,00 o quilo
Feijão: 2 kg por R$ 3,20
Vinagre: 500 mℓ por R$ 0,80
Batata: R$ 1,20 o quilo

5. Realize todas as atividades indicadas na página (276) e, a seguir, discuta com seu grupo a questão ligada à área e ao perímetro das figuras. Existe uma relação de proporcionalidade entre essas grandezas? Justifique sua resposta.

6. A partir das atividades realizadas no exercício anterior, responda:
   a) dos retângulos de mesmo perímetro, qual é o de menor área?
   b) dos retângulos de mesma área, qual é o de menor perímetro?

7. Corte um barbante de 1 m, marque as subdivisões indicadas e realize as atividades sugeridas aos alunos nas páginas 280 a 283 com o metro e seus submúltiplos. Agora verifique sua capacidade de avaliar comprimentos:
   a) Geralmente, as costureiras ouvem que é preciso aumentar mais dois dedos na cintura da saia. A quantos centímetros, mais ou menos, isso corresponde?
   b) Quanto você acha que mede, em metros, o pé-direito (distância entre o piso e o teto) de sua sala de aula? Use a régua grande da escola para conferir.

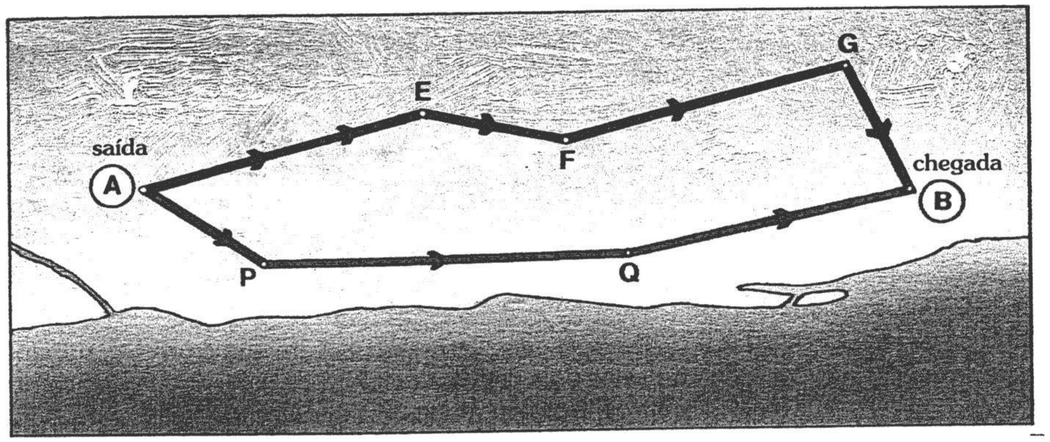
8. Em grupo, faça a tira de 1 dam. Em seguida, resolva:
   a) Com base apenas no "olhômetro", responda: o prédio de sua escola tem mais que 1 dam de frente? E de fundo?
   b) Use a tira de 1 dam e o barbante de 1 m, tome as medidas de frente e de fundo da sua escola e faça uma planta, indicando as medidas corretamente.

9. Numa feira livre, as barracas são sempre montadas com espaço de 0,5 m entre elas, para passagem das pessoas. A barraca de frutas tem 12,8 m de comprimento; a de peixes, 15,70 m; a de cereais, 1,8 dam. Tente descobrir: depois de montadas as três barracas, elas ocuparão mais de 50 m da rua?

10. Converse com professores de geografia de sua escola a respeito da proposta de trabalho com escalas. Peça ajuda a eles para o planejamento de um trabalho integrado de matemática e geografia sobre esse tema, para alunos de 4ª ou 5ª série.

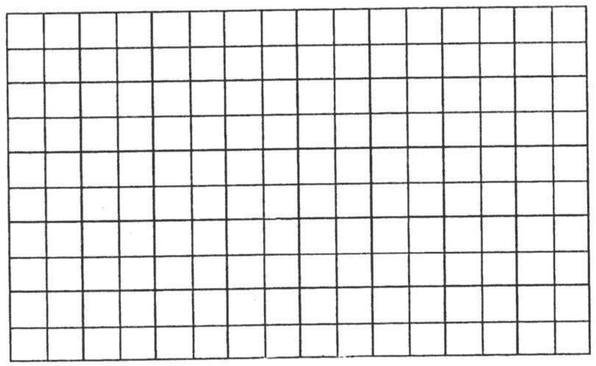
11. Resolva as questões a seguir e avalie se são adequadas para a 4ª ou para a 5ª série. Se possível, peça a alguns professores dessas séries que façam o mesmo e depois compare as opiniões.

a) Dois amigos fizeram uma viagem de carro. Ambos saíram da cidade A com destino à cidade B. Um deles foi pelo litoral e o outro pelo interior. Observe o roteiro de cada um, na escala 1 cm por 10 km e calcule a diferença, em quilômetros, entre as distâncias percorridas.



b) O quadriculado abaixo foi feito nas medidas 0,5 cm por 0,5 cm. Utilizando esses pontos, trace:

- o maior quadrado possível;
- o maior losango não-quadrado possível;
- o maior triângulo isósceles possível.



Calcule, agora, a diferença entre os perímetros:

- do quadrado e do losango;
- do quadrado e do triângulo.

c) A tabela a seguir dá as distâncias entre diversas cidades do Brasil. Planeje dois roteiros, de Florianópolis até Belo Horizonte, sendo que um deles deverá passar por São Paulo. Verifique qual roteiro é o mais curto.

Distâncias: Cidades do Brasil
(em km)

	S. Paulo	R. Janeiro	Recife	P. Alegre	Brasília	B. Horizonte
Aracaju	2 227	1 979	520	3 342	1 820	1 641
Belém	2 950	3 305	2 104	4 051	2 141	2 855
B. Horizonte	586	464	2 139	1 701	740	—
Brasília	1 012	1 204	2 318	2 130	—	740
Cuiabá	1 585	2 026	3 426	2 471	1 134	1 614
Curitiba	408	849	3 133	715	1 420	994
Florianópolis	701	1 142	3 426	477	1 713	1 287
Fortaleza	3 099	2 889	804	4 214	2 692	2 513
Goiânia	913	1 354	2 522	2 028	204	918
João Pessoa	2 829	2 581	124	3 944	2 422	2 243
Maceió	2 494	2 246	257	3 609	2 087	1 908
Natal	3 000	2 752	295	4 115	2 593	2 414
P. Alegre	1 115	1 556	3 840	—	2 130	1 701
Recife	2 725	2 477	—	3 840	2 318	2 139
R. Janeiro	441	—	2 477	1 556	1 204	464
Salvador	1 950	1 702	835	3 065	1 543	1 364
São Luís	3 363	3 115	1 623	4 478	2 748	2 777
São Paulo	—	441	2 725	1 115	1 012	586
Teresina	2 890	2 644	1 162	4 007	2 485	2 306
Vitória	933	509	1 964	2 048	1 281	541

Fonte: *Atividades matemáticas*, 4ª série do 1º grau. São Paulo, Cenp — SEE, 1990.

palavras finais

Ensinar matemática depende muito mais da capacidade do professor de encontrar um caminho em meio à experiência que seus alunos trazem para a sala do que da execução de um plano extremamente minucioso e elaborado. É necessário, portanto, que esse profissional visualize a matemática permeando o cotidiano.

Procuramos aqui, essencialmente, trazer o mundo cotidiano para o mundo da matemática. Nossas sugestões, longe de prescrever o jeito certo, pretendem promover a criatividade do professor, mostrar que há muito mais matemática no dia-a-dia do que os manuais deixam transparecer. Como dissemos no início, este livro é um desafio. Cabe ao professor aceitá-lo e transmiti-lo aos seus alunos.

Finalizando, gostaríamos de contar com a crítica, para que nossos objetivos possam ser alcançados com mais eficiência. E, principalmente, esperamos que o leitor extraia grande proveito deste trabalho — e muito mais seus futuros alunos!

bibliografia

BERGAMINI, D. & EDITORES DA *LIFE*. *As matemáticas*. Rio de Janeiro, José Olympio, 1965.

BOYER, C. *História da matemática*. 10. ed. São Paulo, Edgard Blücher, 1993.

BRINK, F. J. van den & STREEFLAND, L. Young children (6–8). Ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics*, 10, 1979.

BRÜNER, J. S. O processo da educação. 4. ed. São Paulo, Nacional, 1974.

BUERKE, D. An experience with some able women who avoid mathematics. *Learning of Mathematics*, 3, 1982.

CARVALHO, D. L. Metodologia do ensino de matemática. São Paulo, Cortez, 1991.

DANTE, L. R. *Didática da resolução de matemática*. São Paulo, Ática, 1989.

DANTZIG, T. *Número, a linguagem da ciência*. Rio de Janeiro, Zahar, 1970.

DIENES, Z. P. *As 6 etapas do processo de aprendizagem em matemática*.

FRANCO, M. Laura B. Avaliação educacional. In: *Proposta educacional, currículo e avaliação*. São Paulo, Secretaria Estadual da Educação/Cenp, 1992.

FREUDENTHAL, H. *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht, Reidel, 1983.

GLAESER, G. *Mathématique pour l'élève professeur*. Paris, Hermann, 1971.

INHELDER, B. & PIAGET, J. *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Buenos Aires, Paidós, 1972.

KAMII, C. *A criança e o número*. Campinas, Papirus, 1984.

KAMII, C. & DECLARK, G. *Reinventando a aritmética*. Campinas, Papirus, 1994.

LAMPARELLI, L. C. (org.). *Pesquisa: avaliação sobre o ensino de matemática*. São Paulo, Cenp/Cesisp, 1981.

LEONTIEV, A. & LURIA, A. As idéias psicológicas de L. S. Vygotsky. In: VYGOTSKY, L. *A formação social da mente*, São Paulo, Martins Fontes, 1991.

LOVELL, K. & BUTTERWORTH, I. P. Abilities underlying the understanding of proportionality. *Mathematics Teaching*, 1966.

MAGNUSSOM JR, M. & MAMERI, M. *Dos primeiros passos aos primeiros números*. São Paulo, FDE, 1994. (mimeo.)

MIALARET, G. *A aprendizagem da matemática*. Coimbra, Almedina, 1975.

MORA, M. L. F. & AYMEMI, J. M. F. *Proporcionalidade directa: la forma y el número*. Madrid, Sintesis, 1990.

MORF, A. Recherches sur l'origine de la connexité de la suite des premiers nombres. In: GRÉCO, P. & MORF, A. Structures numériques elémentaires. Paris, Presses Universitaires de France, 1962.

NOELTING, G. The development of proportional reasoning and the ratio concept. *Educational Studies in Mathematics*, 1980, v. 11.

PIAGET, J. & INHELDER, B. *Gênese das estruturas lógicas elementares*. São Paulo, Zahar/MEC, 1975.

POLYA, G. A arte de resolver problemas. São Paulo, Hermann, 1971.

RUIZ, A. R. Ensino do conceito de proporcionalidade. São Paulo, USP/Faculdade de Educação, 1985. Dissertação de mestrado.

SANTOS, V. M. A matemática no ciclo básico: em busca de significado. In: A criança e o conhecimento. São Paulo, FDE, 1994.

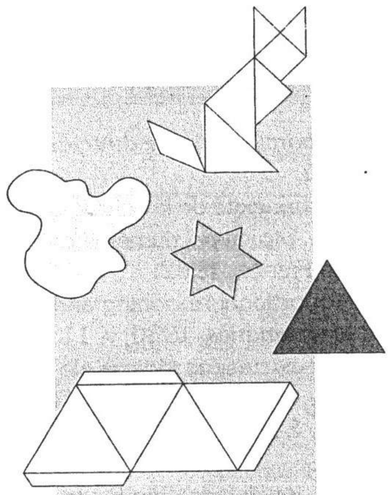
SCHLIEMANN, A., CARRAHER, T. & CARRAHER, D. *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo, Cortez, 1991.

SECRETARIA de Educação do Estado de São Paulo. *Proposta curricular para o ensino de matemática* — 1º grau. São Paulo, Cenp, 1990.

SHOENFELD, A. H. Heuristics in the classroom. In: *Problem Solving in School Mathematics*. Yearbook, 1980.

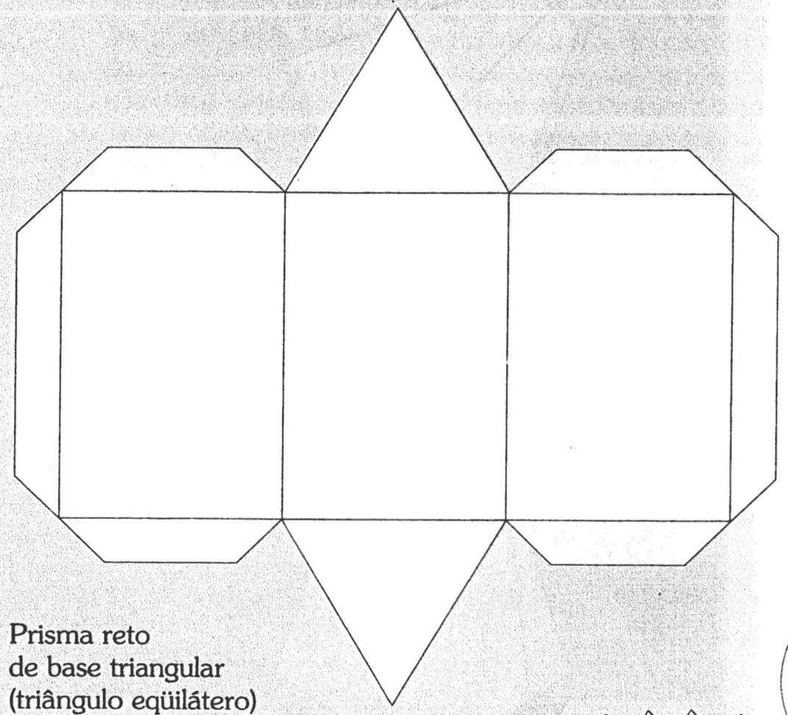
TOFFLER, A. *A terceira onda*. Rio de Janeiro, Record, 1980.

TOLEDO, M. *A prática docente em matemática: uma proposta de construção solidária*. Rio Claro, Unesp, 1989. Dissertação de mestrado.

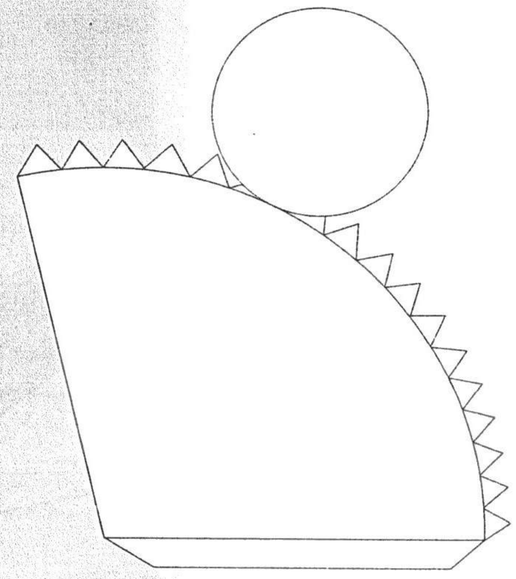


Anexos

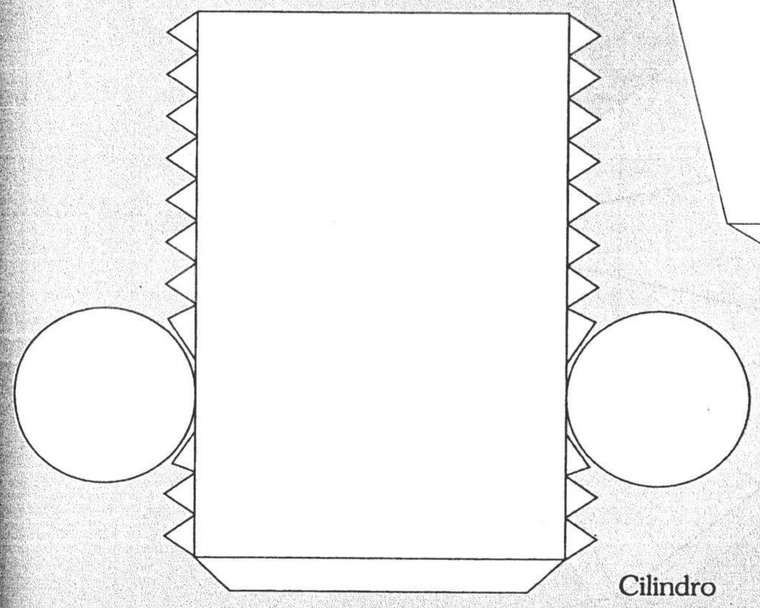
ANEXO 1



Prisma reto
de base triangular
(triângulo eqüilátero)

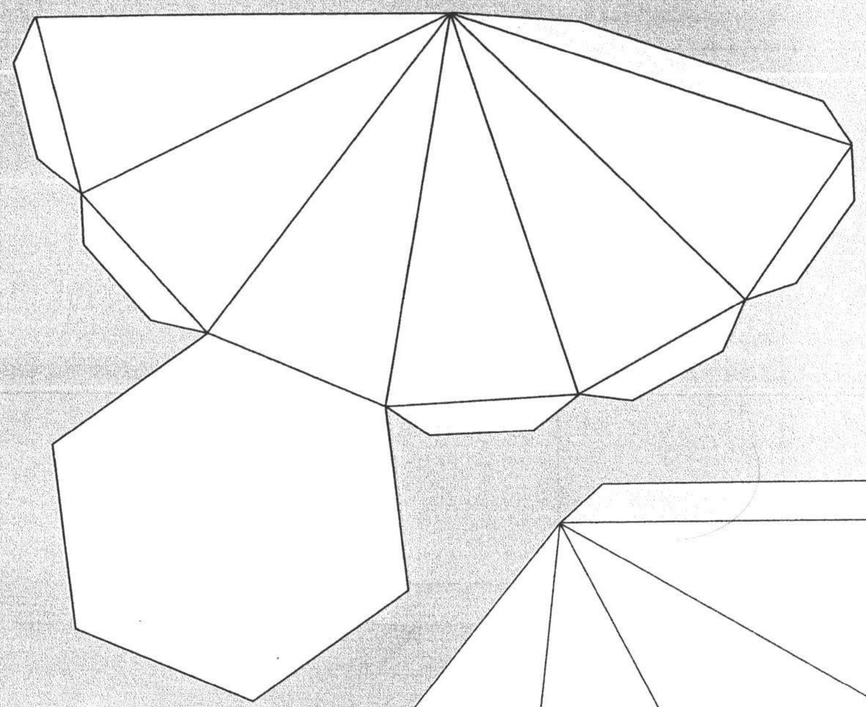


Cone

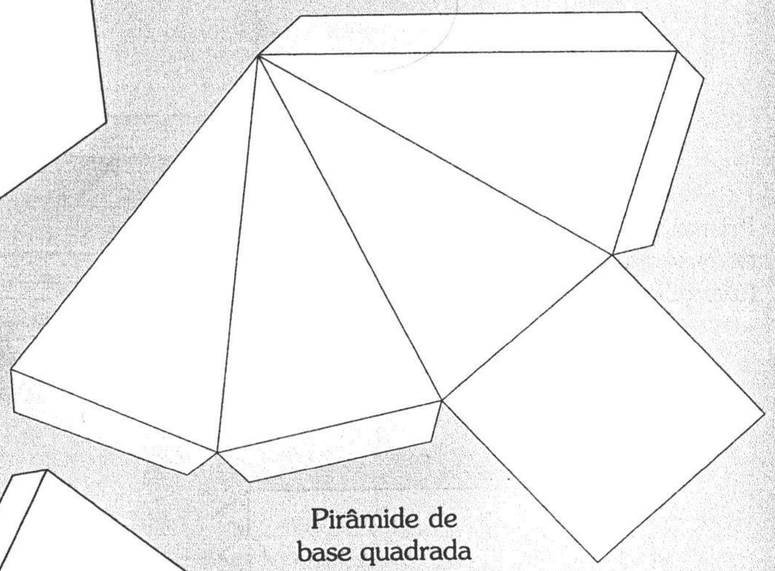


Cilindro

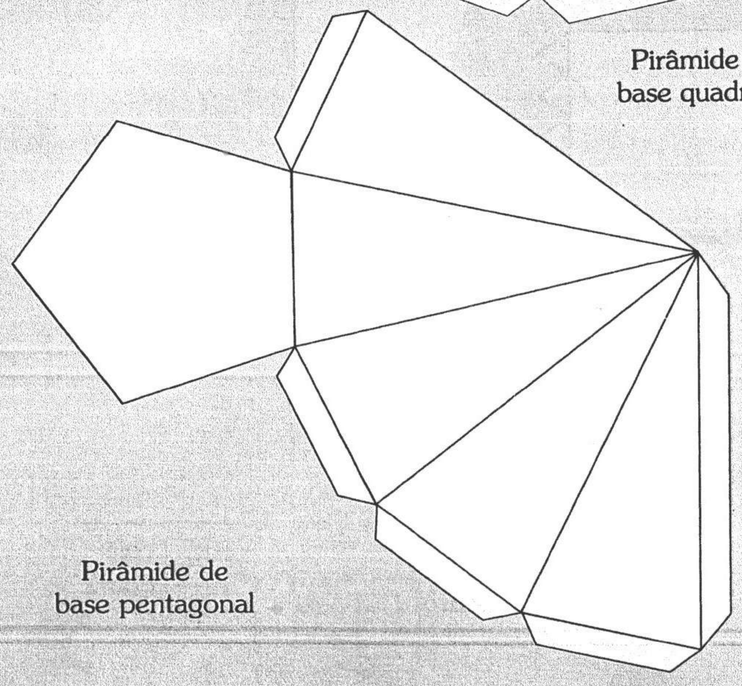
cola
dobra



Pirâmide de
base hexagonal

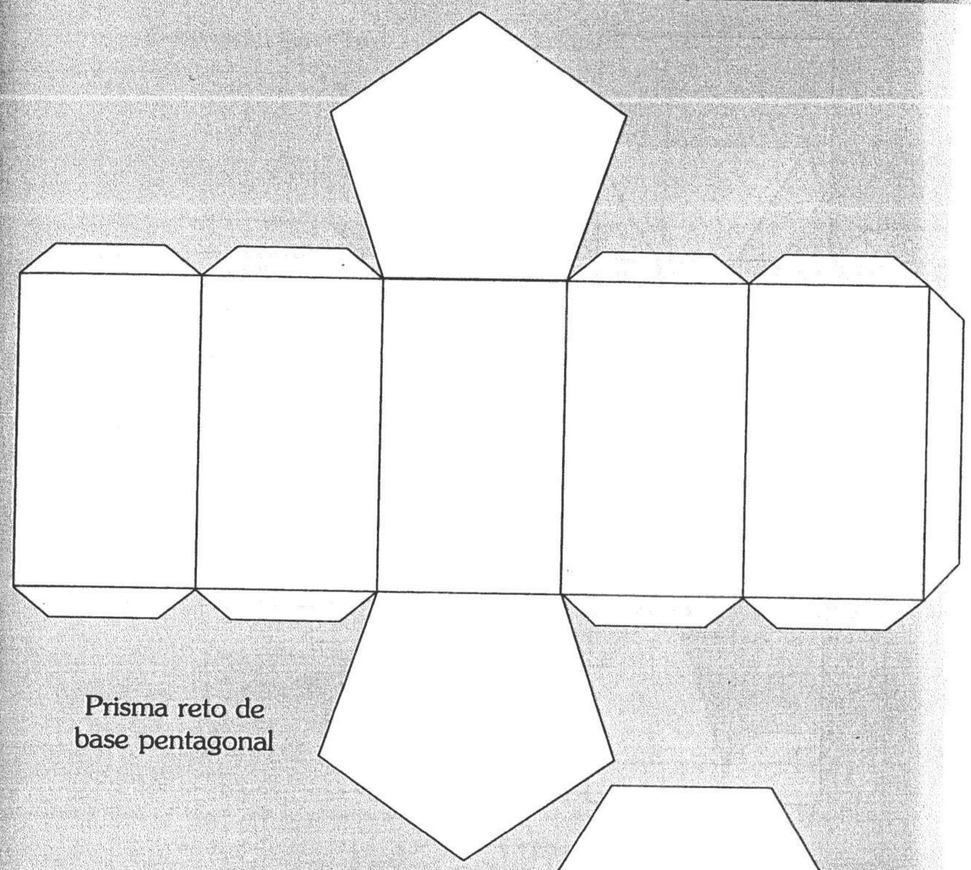


Pirâmide de
base quadrada

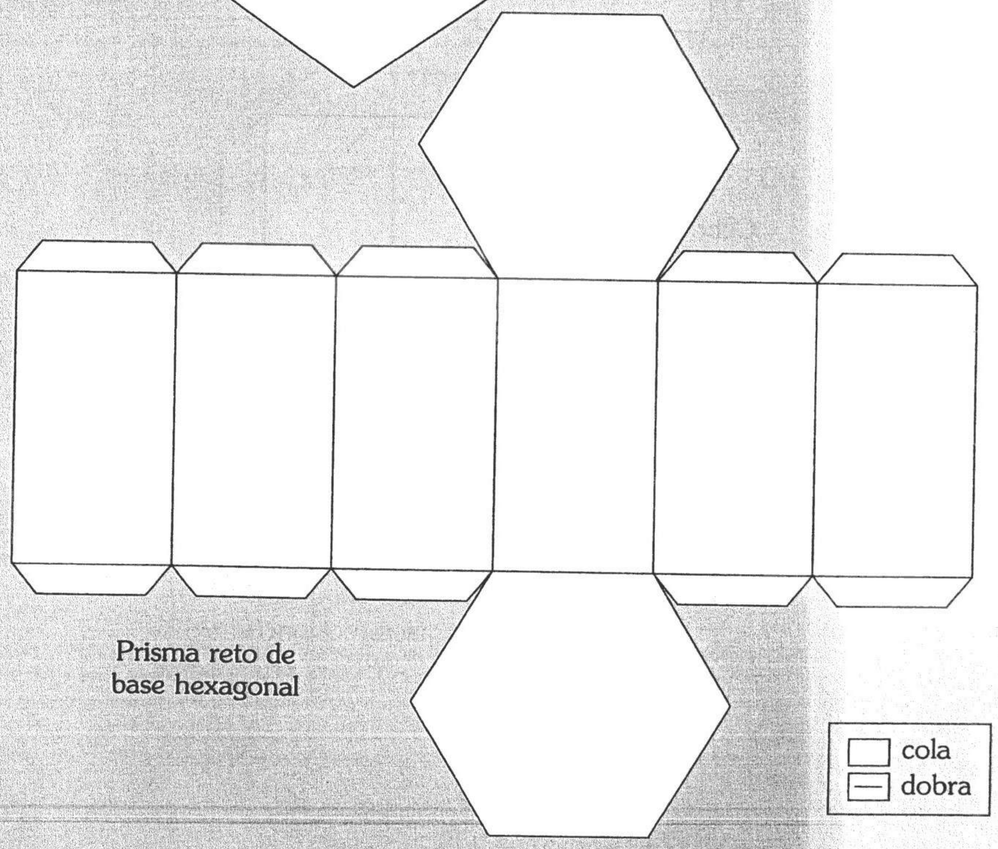


Pirâmide de
base pentagonal

cola
dobra

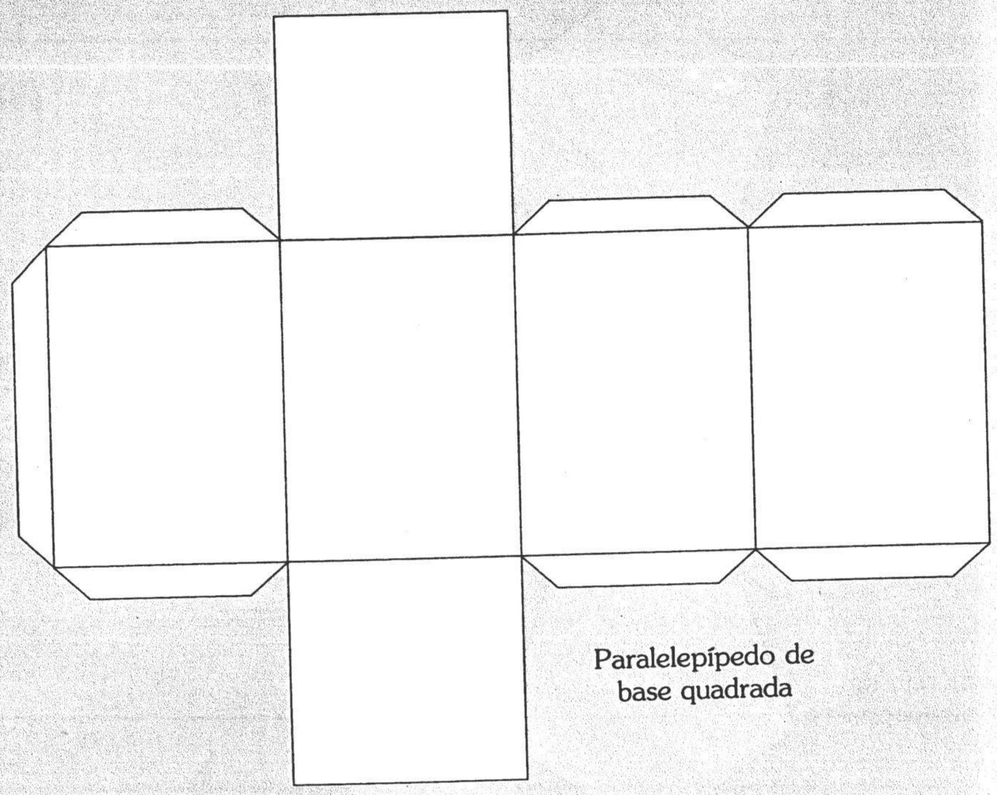


Prisma reto de
base pentagonal



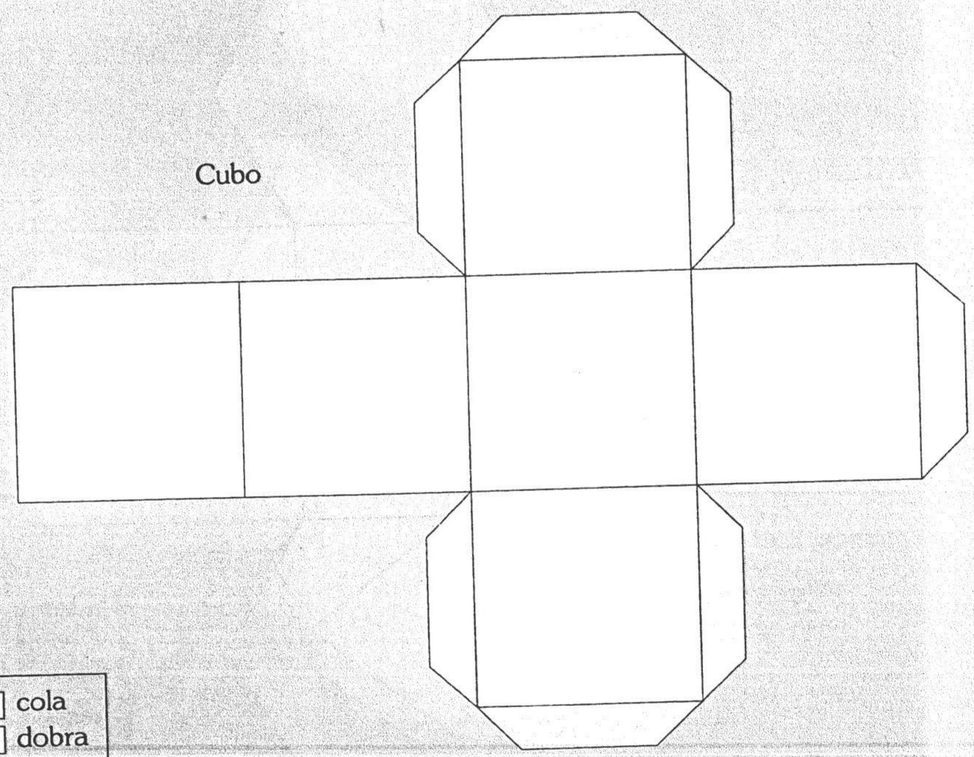
Prisma reto de
base hexagonal

cola
dobra

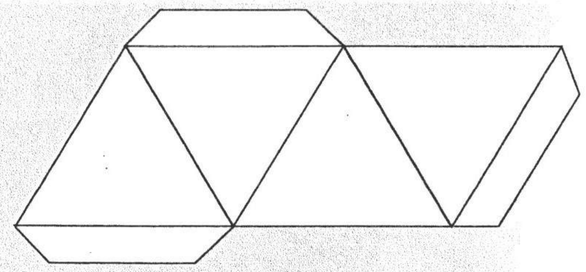


Paralelepípedo de
base quadrada

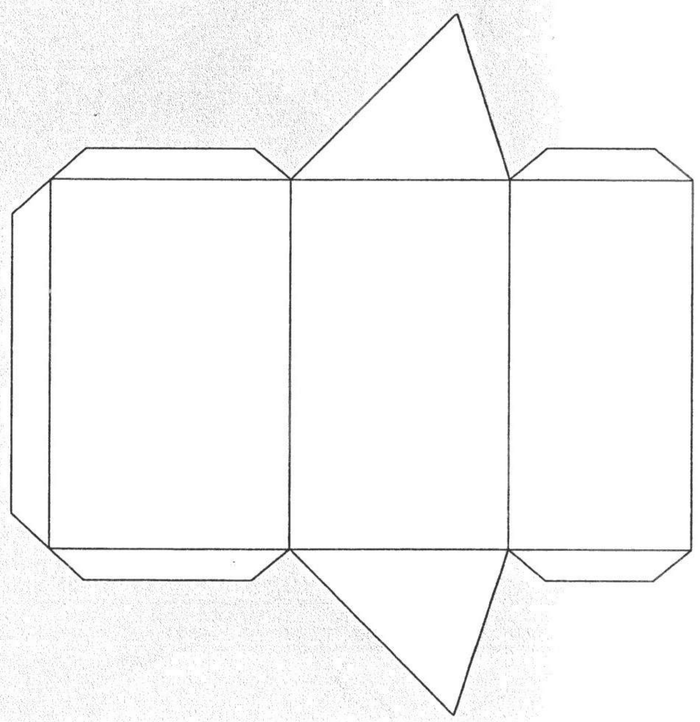
Cubo



cola
dobra

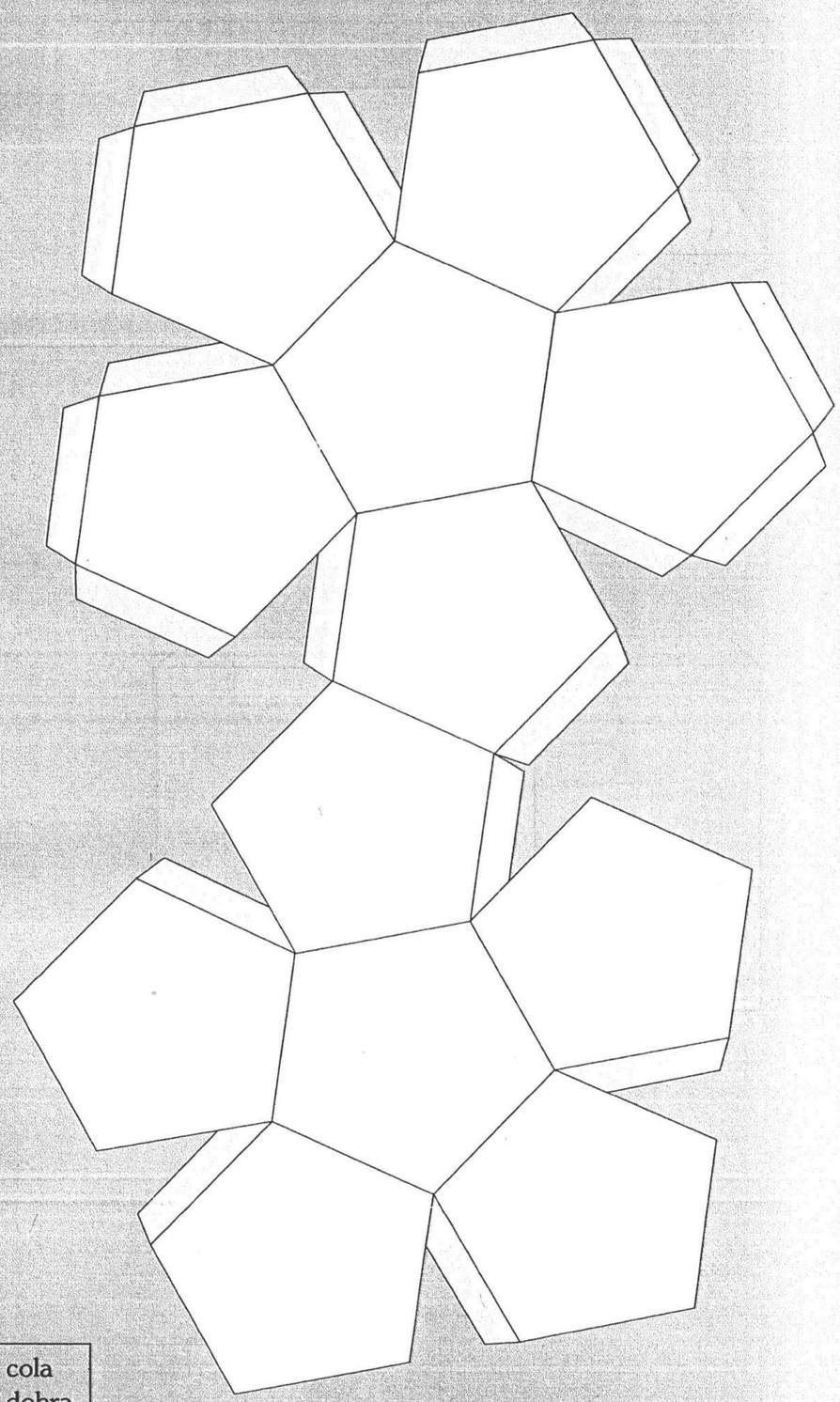


Tetraedro regular



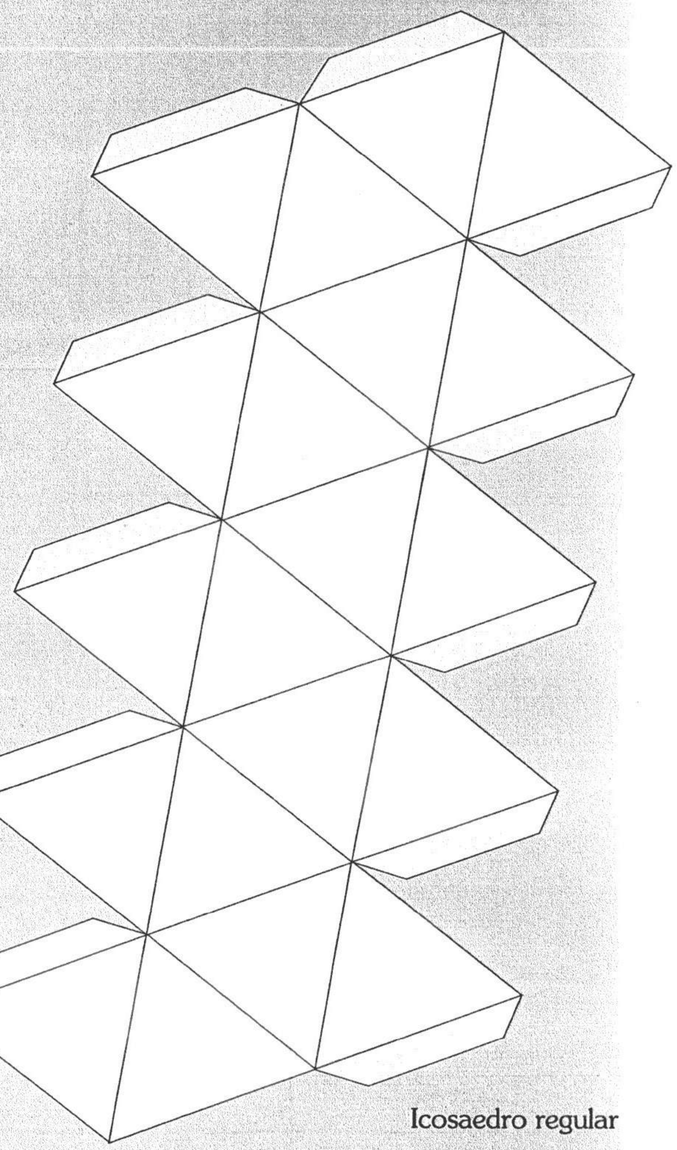
Prisma reto
de base triangular
(base triangulo escaleno)

cola
dobra

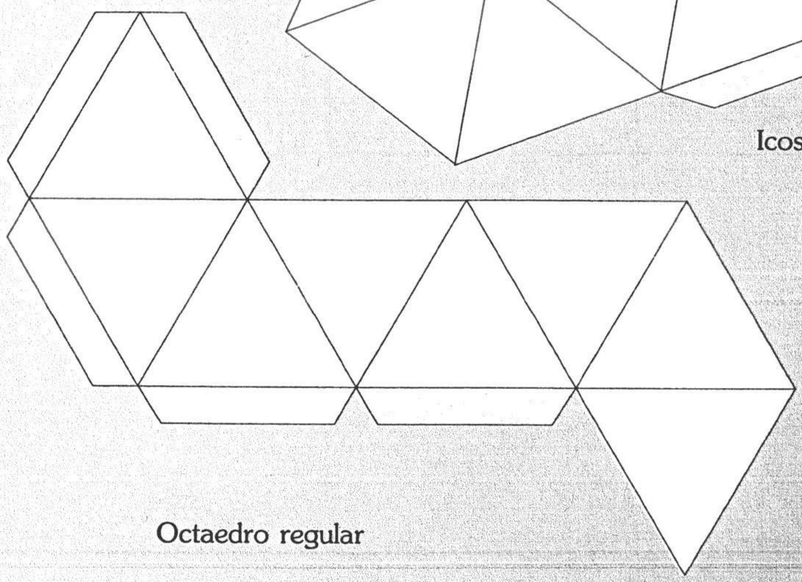


cola
dobra

Dodecaedro regular



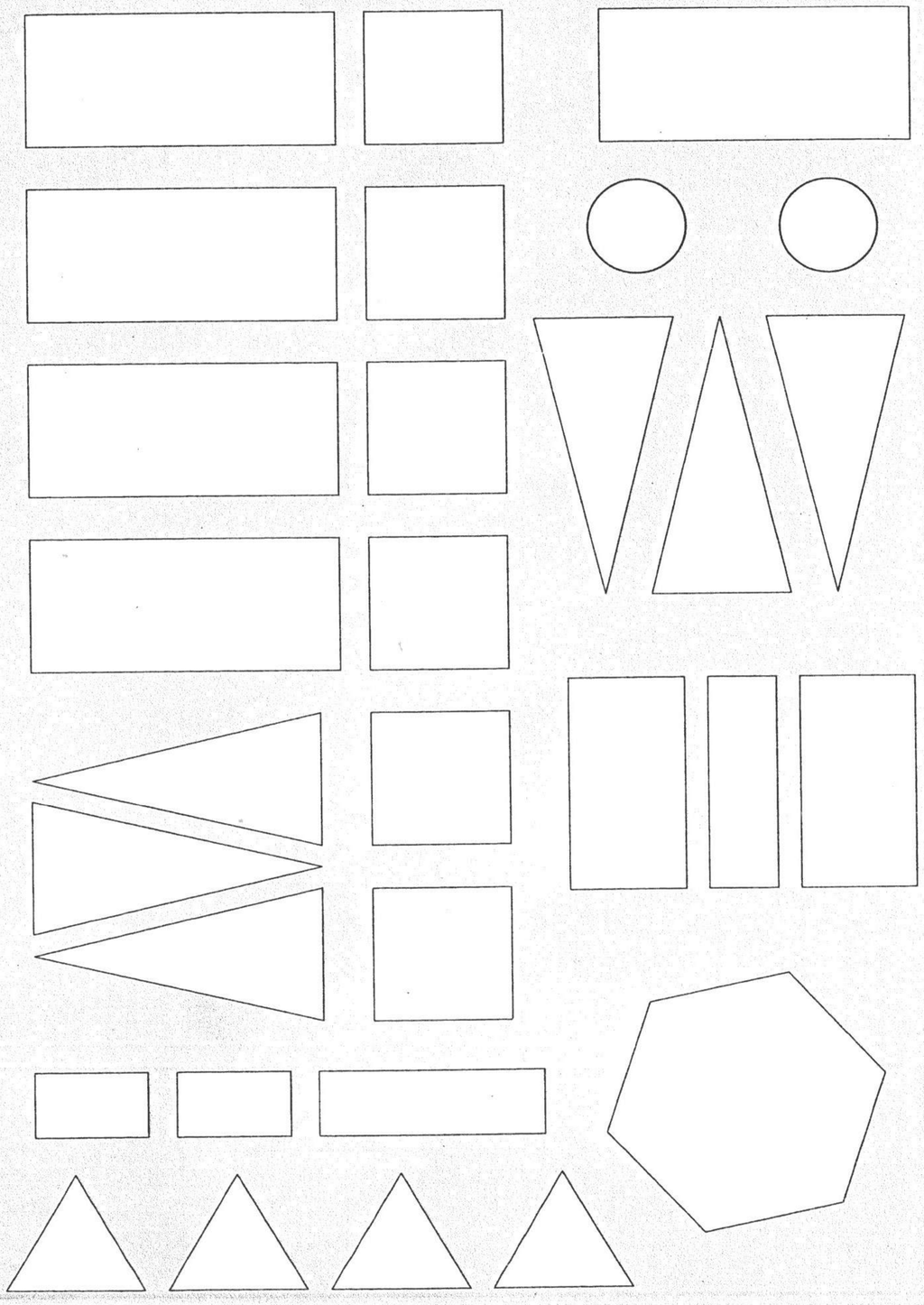
Icosaedro regular



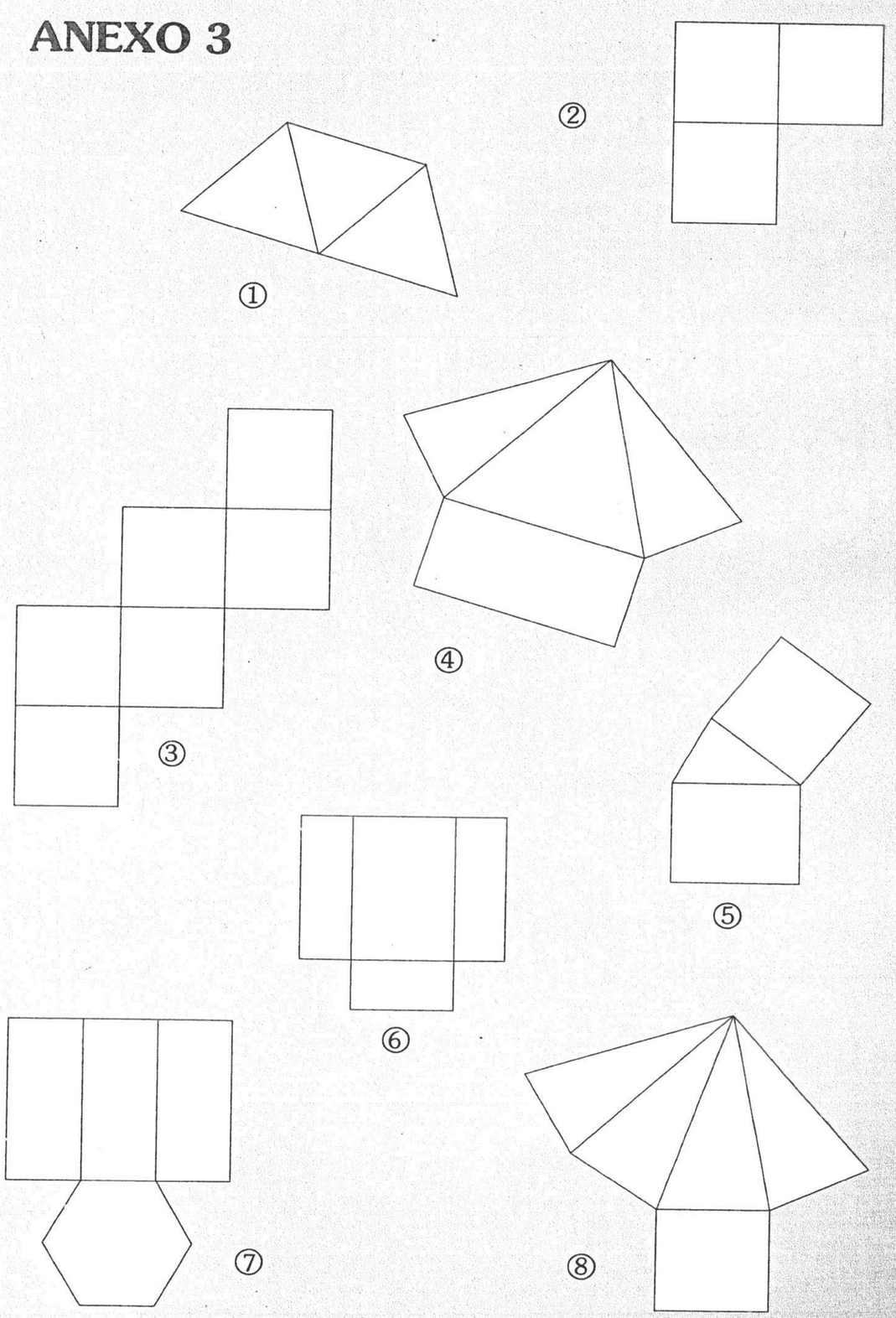
Octaedro regular

cola
dobra

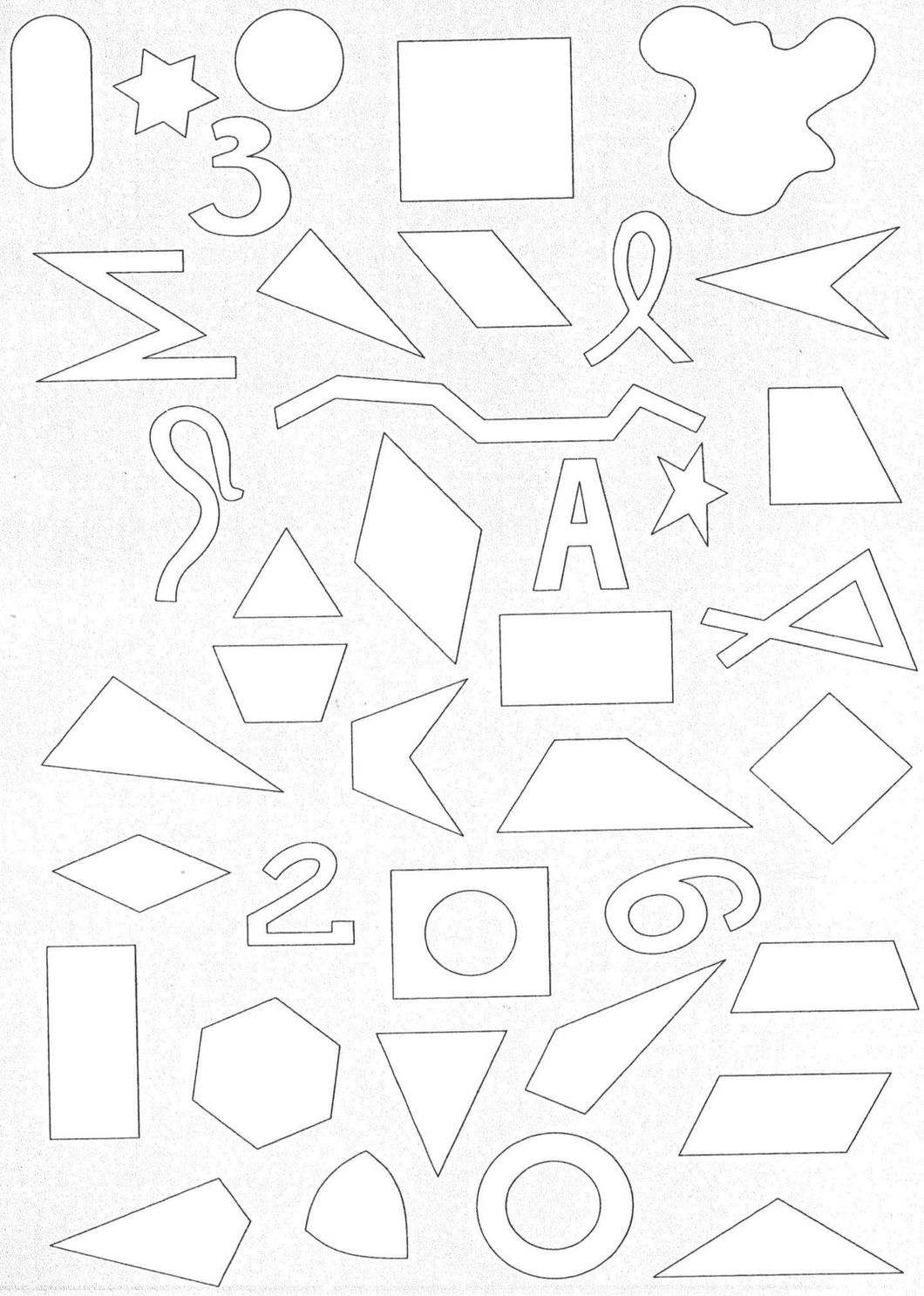
ANEXO 2



ANEXO 3

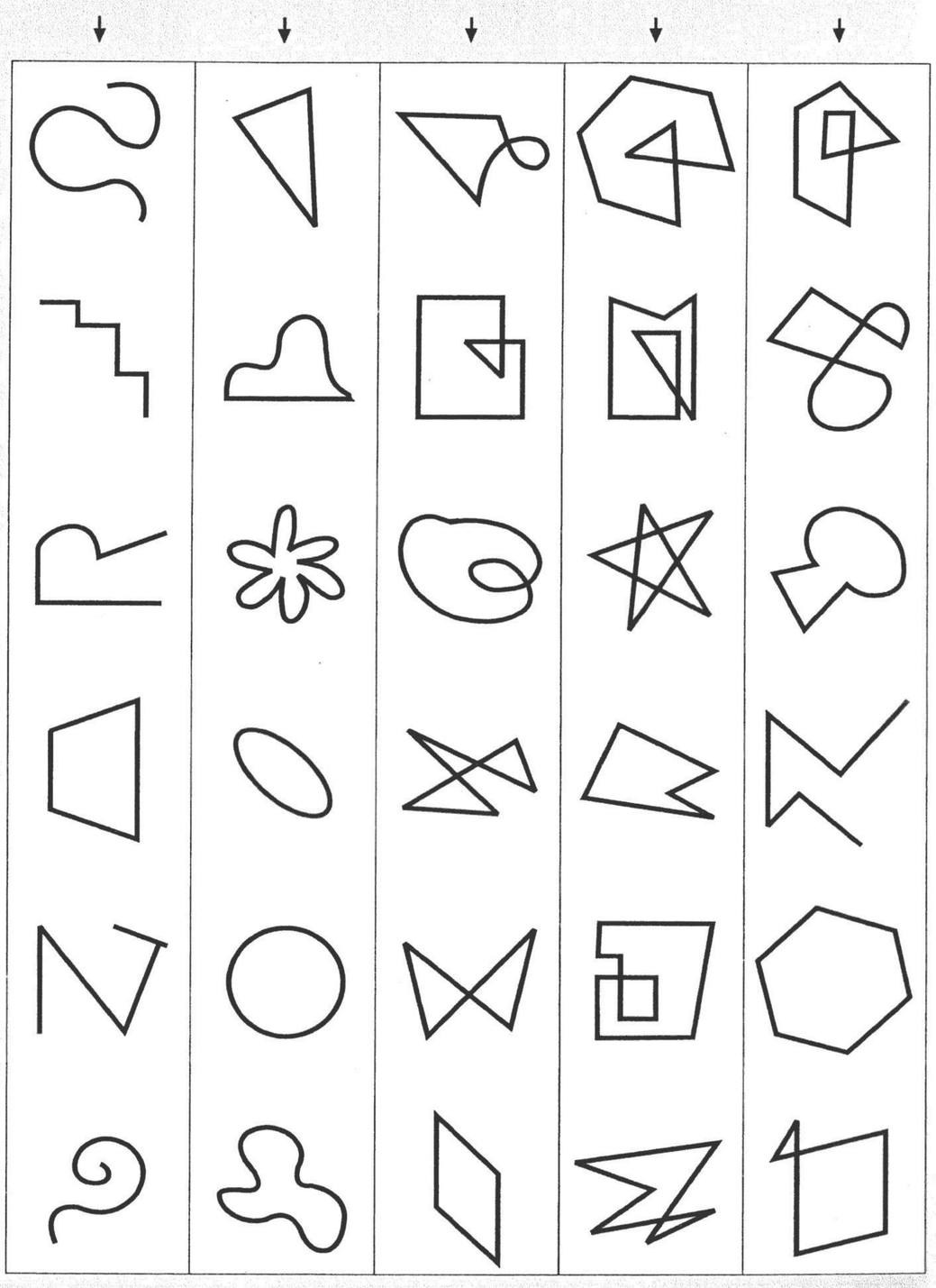


ANEXO 4

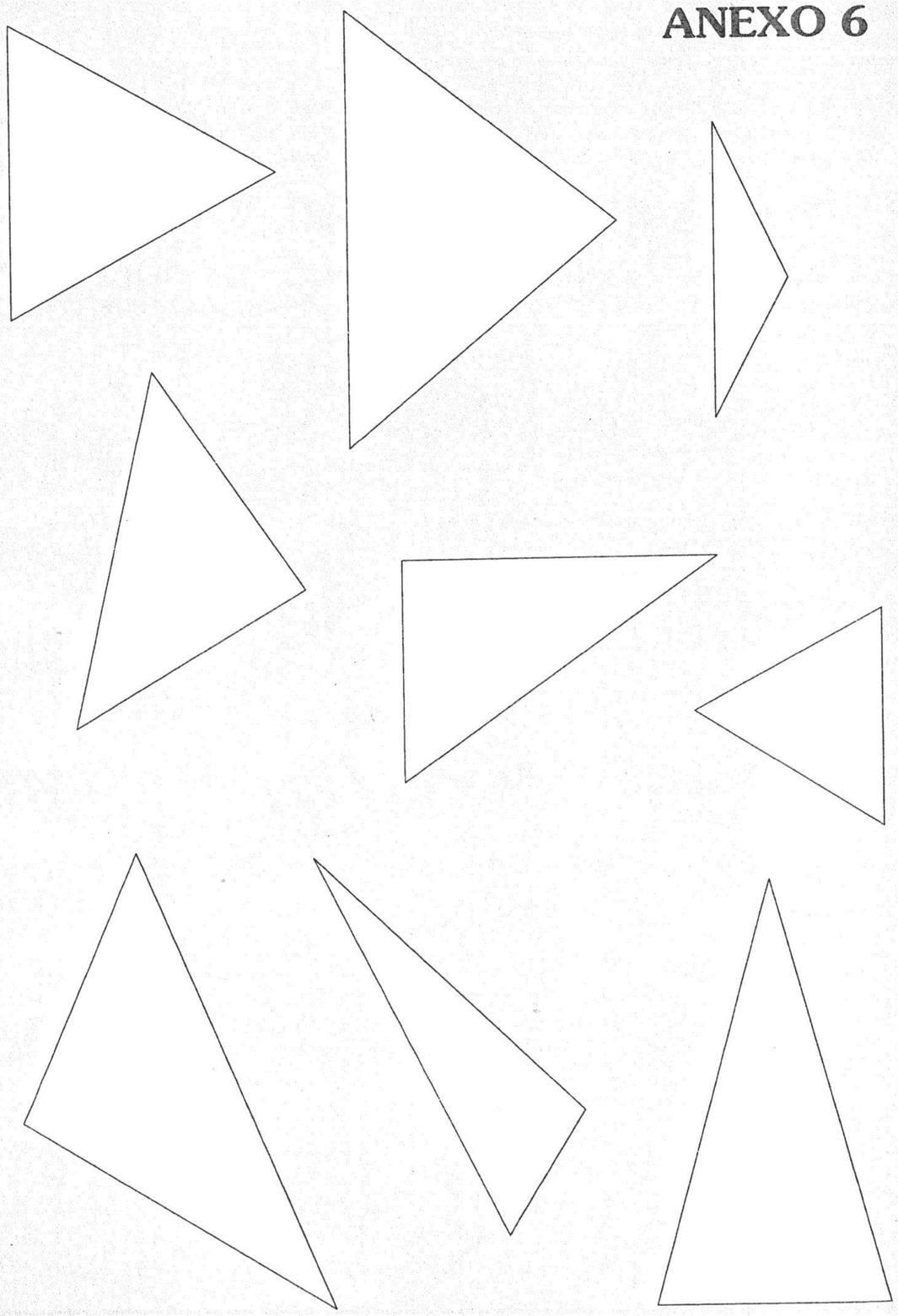


ANEXO 5

Qual é a figura que não é da família?



ANEXO 6



ANEXO 7

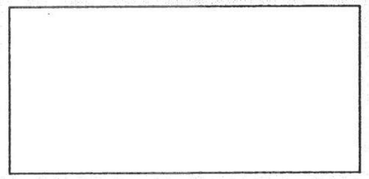


Fig. 1

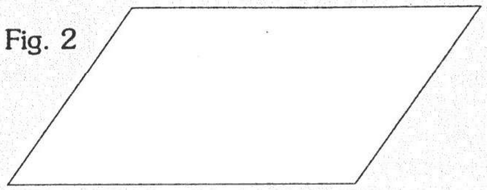


Fig. 2

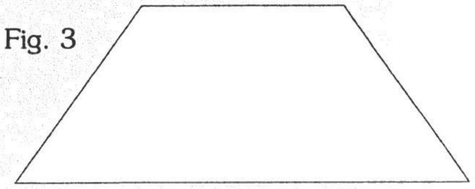


Fig. 3

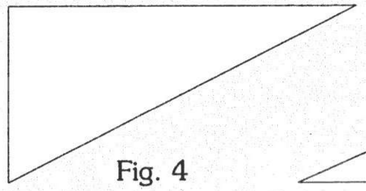


Fig. 4

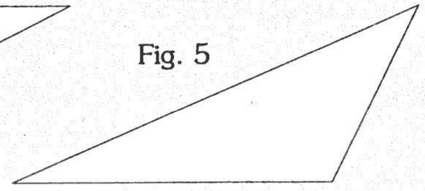


Fig. 5

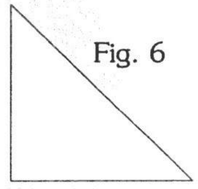
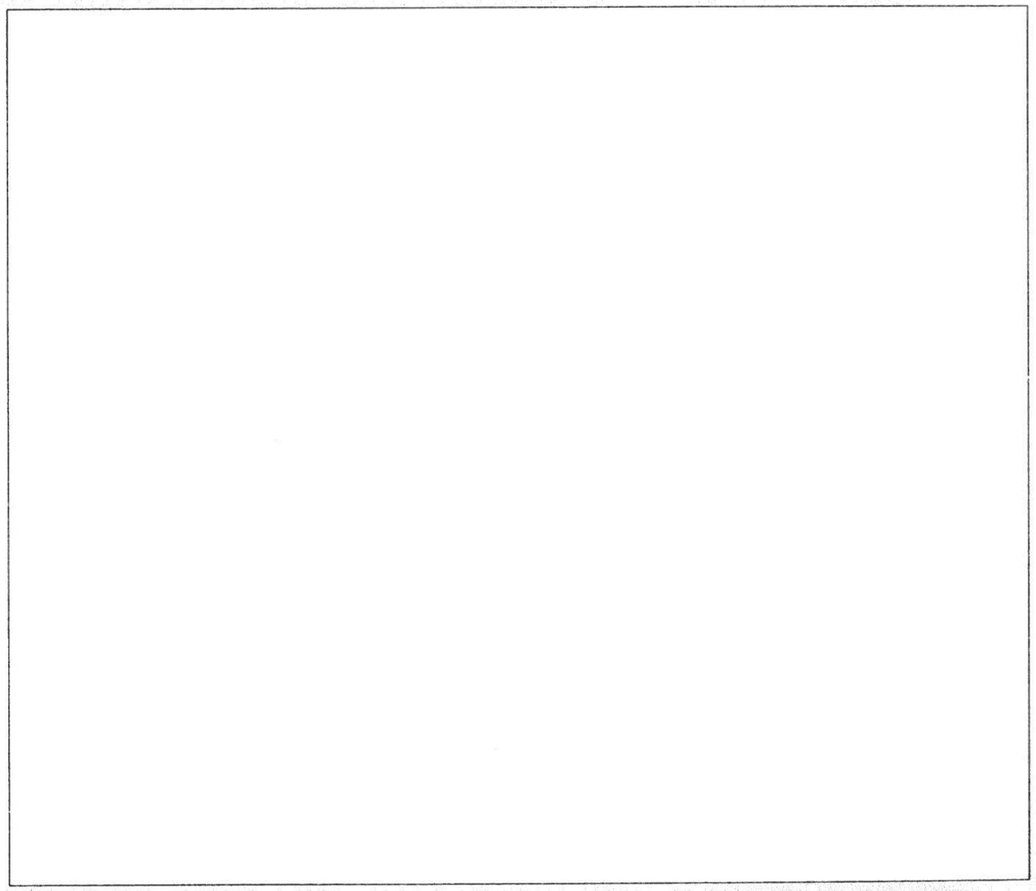


Fig. 6



ANEXO 8

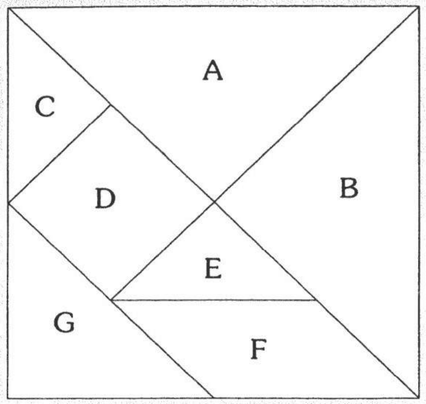


Fig. 1

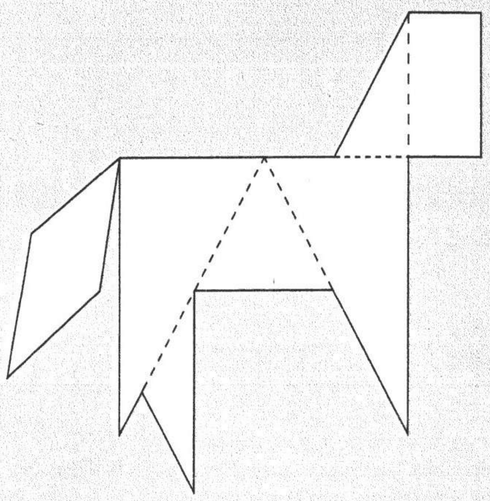


Fig. 2

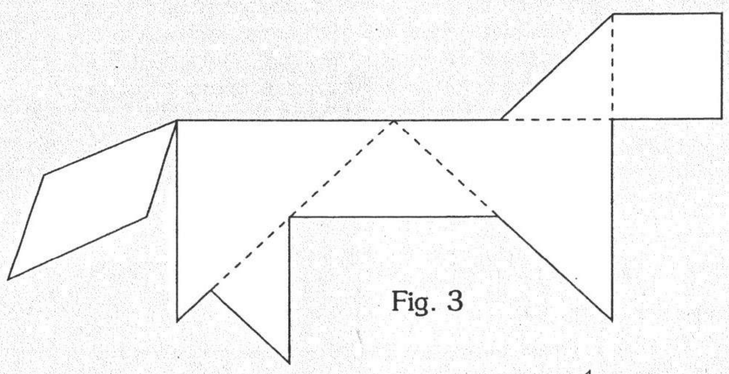


Fig. 3

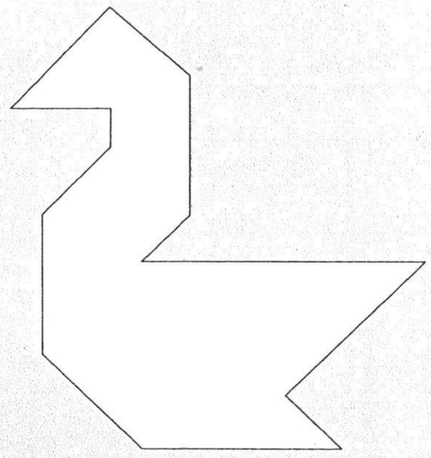


Fig. 4

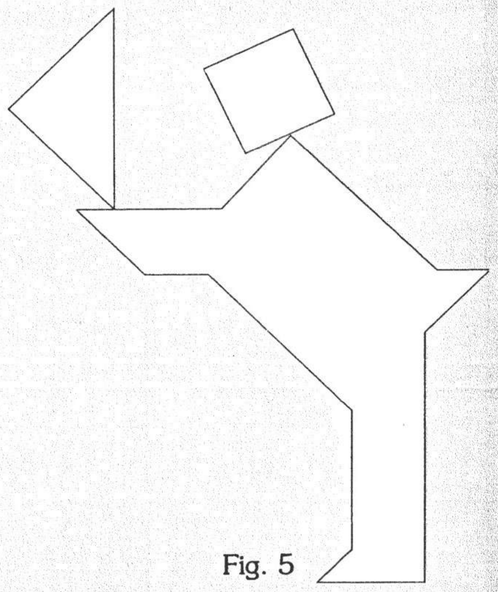
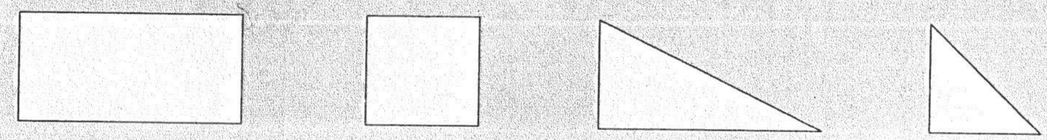
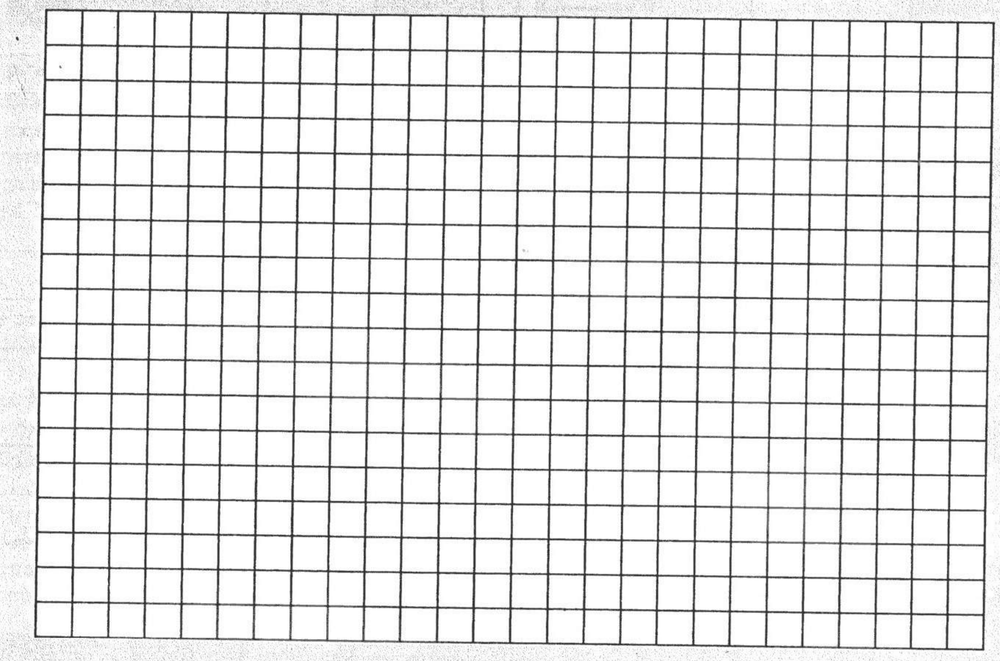
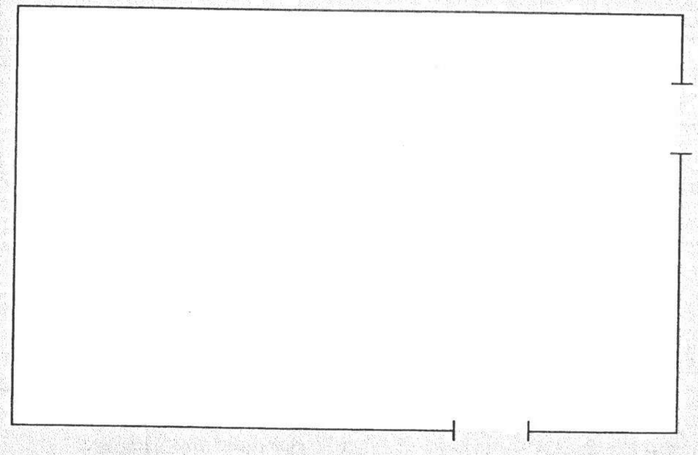


Fig. 5

ANEXO 9

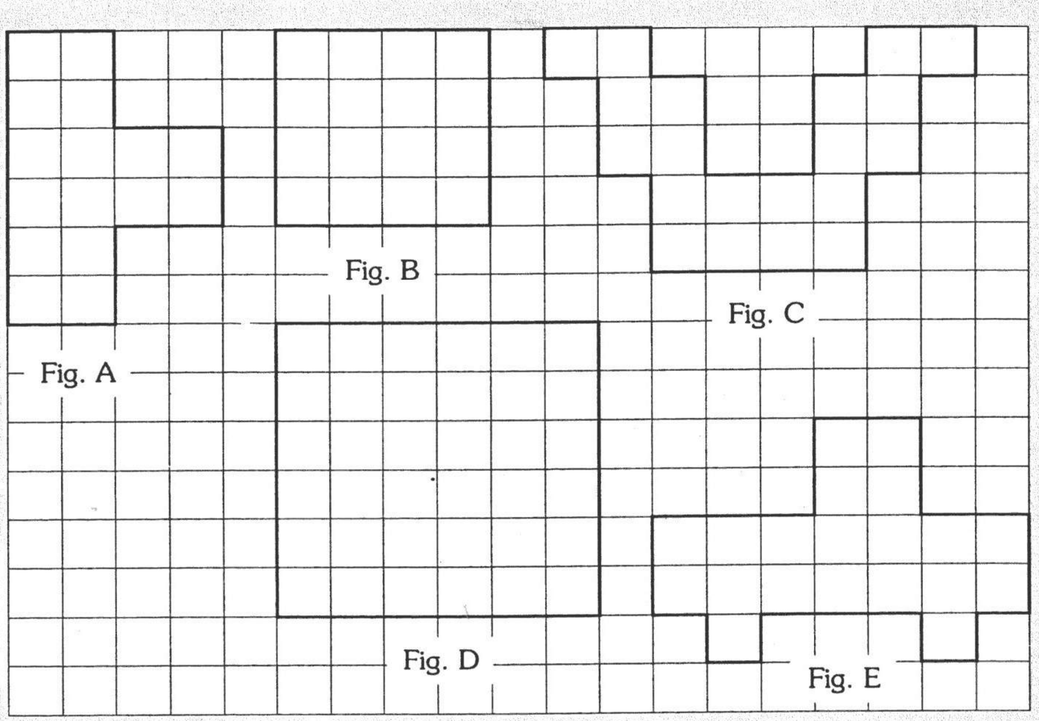






ANEXO 10





Áreas das figuras

Figura	unidade 	unidade	unidade 	unidade 
A	4	8	16	8
B				
C				
D				
E				
F				

Caderno de respostas

Capítulo 3

p. 33

Este é um problema de análise combinatória: temos 4 atributos (cor, forma, tamanho, espessura) para serem organizados em árvores, em que a mudança na ordem dos atributos produz uma nova árvore. Trata-se de uma permutação dos 4 elementos:

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Podemos construir 24 diferentes diagramas de árvore, organizando as peças por seus 4 atributos.

p. 35

Olhando mais de perto
Questão 2

Se cada peça possui 4 atributos que a diferenciam das outras (cor, forma, tamanho, espessura), não será possível encontrar peças com 5 diferenças uma da outra.

Capítulo 5

p. 63

Olhando mais de perto
Questão 1

Questão 2

CCIXX, 234, 974 e CDLX

a) Sete símbolos: I, V, X, L, C, D e M.

b) O sistema apresenta um tipo bastante rudimentar de "valor posicional": cada um dos símbolos I, X, C, M, colocado à direita de outro de igual valor ou imediatamente superior somam-se os valores; e, colocado à esquerda, subtraem-se os valores. Assim: I se relaciona com I, com V e com X; X se relaciona com X, com L e com C; C se relaciona com C, com D e com M.

c) Não há regras para constituir uma nova ordem para cada 10 unidades da ordem anterior.

d) A representação correta é XCIX (conforme item b), pois I não se relaciona com C.

p. 66

Os 40 palitos, agrupados de 6 em 6, ficam representados por: $(1\ 0\ 4)_{seis}$. A representação dos 32 palitos, também agrupados de 6 em 6, é: $(5\ 2)_{seis}$.

p. 67

As 21 crianças, agrupadas de 4 em 4, ficam representadas por: $(1\ 1\ 1)_{quatro}$.
Se as 21 crianças estiverem agrupadas de 7 em 7, teremos: $(3\ 0)_{sete}$.

Sistema indiano	Sistema egípcio	Sistema babilônio	Sistema chinês
2			
5			
32			
147			
478			
3 742			

p. 68

Ábaco de papel

Para a contagem dos 27 pontos, com fichas agrupadas de 5 em 5, teremos: $(1\ 0\ 2)_{cinco}$.
No caso de os 27 pontos serem agrupados de 8 em 8, a representação será: $(3\ 3)_{oito}$.

p. 69

Agrupando os 28 pontos de 3 em 3 unidades, teremos: $(1\ 0\ 0\ 1)_{três}$.

p. 78

a) A placa será trocada por 10 barras. Uma das barras será trocada por 10 cubinhos. Depois, retira-se 1 cubinho. Sobram 9 barras e 9 cubinhos; ou seja, o número 99.

b) Uma das barras será trocada por 10 cubinhos. Depois, retira-se 1 cubinho. Sobram 2 placas, 3 barras e 9 cubinhos; ou seja, o número 239.

c) Uma das placas será trocada por 10 barras. Uma das barras será trocada por 10 cubinhos. Depois, retira-se 1 cubinho. Sobram 4 placas, 9 barras e 9 cubinhos, ou seja, o número 499.

d) O cubo será trocado por 10 placas; uma das placas, por 10 barras; e uma das barras, por 10 cubinhos.
Retira-se, então, 1 cubinho. Sobram 9 placas, 9 barras e 9 cubinhos, que representam o número 999.

p. 79

Este é um bom exercício de cálculo mental acompanhado da ação, pois os alunos podem usar suas notas para manusear, apoiando seu raciocínio. Cada aluno deve resolver as questões a seu modo e depois a professora pode promover uma discussão sobre os diversos raciocínios elaborados.

a) Mônica deve trocar sua nota de T$ 10 por 10 notas de T$ 1.

b) Para resolver o problema, há vários modos de pensar. Um deles seria:

I. Com duas notas de T$ 10, Lucas paga os T$ 17 e sobra troco. Com a outra nota de T$ 10, ele paga os T$ 5 e sobra troco. Assim, o dinheiro é suficiente. Para achar o troco: dos T$ 20, paga T$ 17 e sobram T$ 3; dos outros T$ 10, paga T$ 5 e sobram T$ 5. Lucas ficará com T$ 8.

II. Se a despesa fosse de T$ 15 e T$ 5, Lucas gastaria T$ 20. Sendo uma despesa de T$ 17, ele gasta T$ 2 a mais. Então, da outra nota de T$ 10, paga estes T$ 2 e sobram T$ 8.

c) Nesta atividade também há vários raciocínios possíveis, como:

I. Com as quatro notas de T$ 1, Laura compra um chocolate; com a nota de T$ 10, compra outros dois chocolates. São três chocolates.

II. Como 4 + 4 = 8, a nota de T$ 10 dá para comprar dois chocolates e sobram T$ 2. Juntando com mais duas notas de T$ 1, Laura compra outro chocolate. Ficam sobrando duas notas de T$ 1. Então, ela compra 3 chocolates.
Do mesmo modo, os outros dois problemas serão resolvidos de acordo com os preços estabelecidos e com a quantidade de dinheiro que o caixa levará ao banco. Certamente, aí também irão surgir várias soluções.

p. 81

Para você fazer

Questão 3

O raciocínio usado nos dois problemas é o mesmo: devemos juntar as quantidades. No entanto, a diferença entre as duas adições se encontra na quantidade de unidades agrupadas em cada ordem.

Na primeira situação, temos:

C	D	U
1	1	
1	3	6
	9	8 +
2	3	4

Ao somarmos 6 + 8 = 14, das 14 unidades, agrupamos 10, formando 1 dezena, que será reunida às dezenas, deixando as 4 unidades na ordem das unidades do resultado. O mesmo raciocínio será feito para a soma 9 + 3 + 1 = 13 dezenas, das quais, um grupo de 10 forma 1 centena, que será somada às demais centenas do resultado, enquanto as 3 dezenas restantes permanecem na ordem das dezenas do resultado (usamos agrupamentos de 10 em 10).

Na segunda situação, temos:

anos	meses	dias
1	1	
2	7	15
5	9	20 +
8	5	5

Ao somarmos 15 + 20 = 35 dias, dos 35, agrupamos 30, formando 1 mês, que será reunido aos demais meses considerados no problema, sobrando, na unidade "dias", apenas os 5 que restaram depois do agrupamento.

Somando os meses, temos: 7 + 9 + 1 = 17 meses. Dos 17 meses, agrupamos 12, formando 1 ano, que se reunirá ao total de anos da soma, enquanto os 5 meses restantes permanecem na ordem dos meses do resultado. (Usamos agrupamentos de 30 em 30 dos dias para os meses, e de 12 em 12 dos meses para os anos.)

Questão 6

a) $(2\ 0\ 1)_{seis}$
Cada uma das fichas verdes será trocada por 6 vermelhas, totalizando 12 vermelhas (2 × 6).
Em seguida, cada ficha vermelha será trocada por 6 azuis. Teremos, então, 72 fichas azuis (12 × 6).
Juntando as 72 azuis obtidas com a ficha azul já existente, teremos 73 fichas azuis, ou 73 unidades.

b) $(3\ 4)_{seis}$
O antecessor é obtido retirando-se 1 ficha azul, o que nos dará $(3\ 3)_{seis}$.

c) $(1\ 2\ 5)_{seis}$
Para obter o sucessor, acrescentaremos 1 ficha azul às 5 já existentes. As 6 fichas azuis podem ser trocadas por 1 vermelha. Assim, obtemos o número $(1\ 3\ 0)_{seis}$.

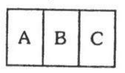
d) $(4\ 0)_{seis}$
O sucessor deste número é obtido acrescentando-se 1 ficha azul, o que nos dará o número $(4\ 1)_{seis}$.
O antecessor será obtido retirando-se 1 ficha azul. Como não há fichas azuis disponíveis nesta representação, vamos trocar 1 ficha vermelha por 6 azuis. Agora, retiramos 1 azul, obtendo o número $(3\ 5)_{seis}$.

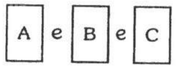
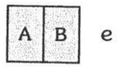
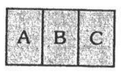
Capítulo 6

p. 89

Sugestões de problemas

1. Para resolver este problema, é necessário destacar partes da figura:



- há 3 retângulos pequenos  e e
- 2 retângulos médios  e 
- 1 retângulo grande 

Ao todo são 6 retângulos.

p. 90

2. A partir da 2ª série, com a manipulação das "notas", já é possível resolver problemas deste tipo:

b) 100 + 10 + 10

c) 120 notas de T$ 1

d) 50 + 50 + 10 + 5 + 5 ou
100 + 5 + 5 + 5 + 5

e) 50 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10

3. A partir da 3ª série, dependendo do nível da classe, já se pode propor este tipo de problema, que depende muito de uma capacidade de organização dos dados.
Uma possível solução seria:
540,00 ÷ 3 = 180,00

Pessoa	Recebeu	Gastou	Ficou com
Luís	180	40 (mãe)	180 − 40 = 140
Maria	180	45 + 56 = 101 (roupas) 180 − 101 = 79 (mãe)	zero
Pedro	180	180 ÷ 2 = 90 (mãe)	90
Mãe	40 + 79 + 90 = 209	zero	209

4. Problema que exige organização das informações e deve ser aplicado a partir da 3ª série.
Uma possível organização dos dados é:

1ª informação:	frutas		peixe
2ª informação:	frutas	verduras João	peixe
3ª informação:	frutas André	verduras João	peixe Miguel

6. Esse tipo de problema exige leitura atenta e repetida a cada questão. Com menos dados, pode ser proposto até a partir da 1ª série, pois incentiva o trabalho de compreensão de texto, desde que as crianças sejam motivadas a resolvê-lo como um desafio.
Vamos às respostas:

- não há nenhuma bola na sala;
- os carrinhos estão em maior quantidade;
- as bonecas, em menor quantidade;
- para brincar de casinha, depende de como cada criança vai planejar a brincadeira.

Por exemplo: 3 bonecas para "mamãe, papai e filhinha"; 3 carros um para cada pessoa da "casa"; 4 jogos de panelinhas para colocar na cozinha.

7. • Não é possível saber quanto foi o total gasto, pois é necessário conhecer as quantias de Ana e Pedro.

- O que sabemos é que o total foi menos de R$ 15, pois Jorge gastou R$ 5 e os outros dois gastaram, cada um, menos de R$ 5. Então, R$ 15 serão suficientes para pagar a conta.
- Podemos dizer que sim, porque cada um gastou menos de R$ 5.

8. 12 galinhas (5 + 7)

p. 91

9. Temos aqui, novamente, uma questão que exige organização das informações, agora com observação dos detalhes das figuras. Com quantidades bem menores de elementos em cada quadro, este problema pode ser apresentado desde a 1ª série.

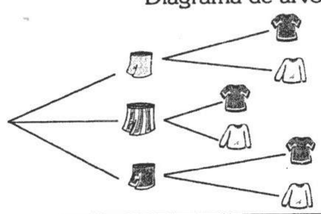
a) 14 b) 4 c) meninas d) vôlei e) 2

10. O bebê.

p. 92

11. Temos aqui o trabalho já discutido no capítulo sobre classificação. Como já vimos, há tipos de organização dos dados, como o diagrama de árvore ou as tabelas, que facilitam muito o raciocínio. (Próprio para alunos a partir da 3ª série).

Diagrama de árvore



6 uniformes

bermudas / camisas			

12. Este é um problema aconselhável para alunos que já estejam trabalhando com números decimais. As respostas das questões:

a) cada um escolhe sua compra;

b) 2,00 ÷ 2 = **1,00**; 2 × 1,30 = **2,60**; 3 × 2,00 = **6,00**.

Total: 1,00 + 2,60 + 6,00 + 1,00 = 10,60

c) 2,40 × 3 = 7,20

Pensando apenas no preço é vantagem, mas, se houver pouca gente para comer, os morangos podem se estragar e vai haver prejuízo.

13. Este tipo de problema exige a leitura de um gráfico, tema bastante atual, dentro do contexto do tipo de informações que se recebe hoje. (Adequado a partir da 3ª série.)
a) Corinthians; b) Santos; c) 10 votos;
d) 3 + 5 + 8 + 10 = 26 votos

p. 93

16. Uma possível forma de raciocínio é:
Se 1 tijolo pesa 1 quilo mais meio tijolo, e como 1 tijolo tem 2 meios tijolos, significa que meio tijolo pesa 1 quilo e o tijolo todo pesa 2 quilos. Assim, 1 tijolo e meio pesa 3 quilos (2 + 1).

17. O homem deverá fazer 7 viagens. Uma possível solução:

1ª viagem — leva a galinha e a deixa na outra margem;
2ª viagem — volta sozinho à primeira margem;
3ª viagem — leva a raposa, deixando-a na outra margem;
4ª viagem — volta, com a galinha, à primeira margem;
5ª viagem — deixa a galinha na primeira margem e leva o milho, deixando-o com a raposa;
6ª viagem — volta sozinho à primeira margem;
7ª viagem — leva a galinha, completando sua tarefa.

18. Este problema pode ser discutido pelos alunos de 3ª ou 4ª série. Pode-se sugerir que façam experiências com pequenos frascos. Para facilitar as indicações, suponhamos que cada garrafa cheia contenha 1 litro de líquido.

Algumas soluções possíveis:

I. Pegar cada garrafa cheia e passar metade do seu líquido para uma das vazias. Ficaremos com 30 garrafas com líquido até a metade de sua capacidade. Dando 10 garrafas a cada pessoa, cada um receberá 10 garrafas e 5 litros de líquido.

II. Pegar as 5 garrafas com líquido até a metade e passar esse líquido para as outras 5 garrafas que também contêm líquido até a metade. Ficaremos com 5 garrafas cheias e 5 vazias. Com isso, obteremos, no total, 15 garrafas cheias e 15 vazias, que podem ser igualmente repartidas entre as 3 pessoas. Cada uma ficará com 5 garrafas cheias e 5 vazias, ou seja: 10 garrafas e 5 litros de líquido.

III. Pegar 2 garrafas com líquido até a metade e passar para outras 2 que também têm líquido até a metade. Ficaremos com 2 garrafas cheias e 2 vazias. Com isso, obteremos, no total, 12 garrafas cheias, 12 vazias e 6 até a metade. Repartindo-as igualmente entre as 3 pessoas, cada uma receberá 4 garrafas cheias, 4 vazias e 2 pela metade, o que corresponde a:

4 + 4 + 2 = 10 garrafas
4 litros + 2 meios litros = 5 litros de líquido

p. 95

Para você fazer

Questão 4

a) Basta que A e B troquem suas fichas que valem, respectivamente, 7 e 9 reais, ficando:

A com as fichas de 5, 1, 9 (15 reais)
B com as fichas de 6, 7, 2 (15 reais)
Com suas próprias fichas 8, 3, 4 (15 reais)

b) O problema pode ser resolvido de muitos modos, sendo importante que os alunos percebam *todas* as possibilidades, organizando os múltiplos de 3 (pacotinhos de 3 balas de frutas):

6 × 3 + 2 = 20 (6 pacotes de balas de frutas e 2 balas de hortelã)
5 × 3 + 5 = 20 (5 pacotes de balas de frutas e 5 balas de hortelã)
4 × 3 + 8 = 20 (4 pacotes de balas de frutas e 8 balas de hortelã)
. . .
. . .
. . .
1 × 3 + 17 = 20 (1 pacote de balas de frutas e 20 balas de hortelã)
0 × 3 + 20 = 20 (nenhum pacote de balas de frutas e 20 balas de hortelã)

c) Este problema tem solução mais fácil se raciocinarmos do estado final até o estado inicial, ou seja:

estado final

A	B	C
8	8	8

Para chegar a esse estado, Carmem dobrou as fichas de Ana e Beatriz. Isso significa que, na 2ª rodada, a situação era:

na 2ª rodada

A	B	C
4	4	16

foram dobradas e ficaram 8
foram dobradas e ficaram 8
deu 4 para A e 4 para B, então perdeu 8 e ainda ficou com 8

Para chegar a esse estado, Ana dobrou as fichas de Beatriz e Carmem. Isso significa que, na 1ª rodada, a situação era:

na 1ª rodada

A	B	C
14	2	8

deu 2 para B e deu 8 para C, então perdeu 10 e ainda ficou com 4
foram dobradas e ficaram 4
foram dobradas e ficaram 16

Concluímos que:
- Ana iniciou o jogo com 14 fichas e acabou com 8 (perdeu 6)
- Beatriz iniciou o jogo com 2 e acabou com 8 (ganhou 6)
- Carmem iniciou o jogo com 8 e acabou com 8 (não ganhou nem perdeu)
- Então, quem perdeu mais dinheiro foi Ana.

Capítulo 7

p. 144

Para você fazer

Questão 1

Os egípcios usaram, intuitivamente, as propriedades que hoje são conhecidas como *propriedade associativa da adição* (ao decompor o 11 em 3 parcelas) e *propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição* (ao multiplicar por cada uma das 3 parcelas):

$$11 \times 43 = (8 + 2 + 1) \times 43 = 344 + 86 + 43 = 473$$

Questão 2

Para a metade da receita
2 xícaras (chá) de farinha
1 1/2 xícara (chá) de açúcar
3 ovos
1/2 colher (sopa) de fermento
1/4 litro de leite

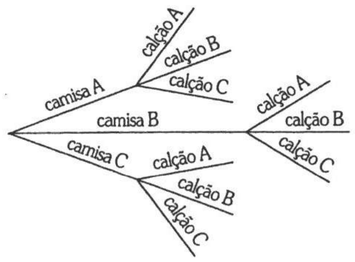
Para o triplo da receita
12 xícaras (chá) de farinha
9 xícaras (chá) de açúcar
18 ovos
3 colheres (sopa) de fermento
1 1/2 litro de leite

Questão 3

Por raciocínio proporcional, os cálculos ficam fáceis:
30 ovos são 5 × 6 ovos ou 5 meias dúzias de ovos e custam R$ 2,50. Assim, cada meia dúzia custa 2,50 ÷ 5 = 0,50.
Ana ficará com 1 dúzia e meia, ou seja, 3 meias dúzias e pagará 3 × 0,50 = 1,50.

Questão 4

Verificamos que há 2 atributos (camisa e calção), e cada um tem 3 variações (3 tipos de camisa e 3 tipos de calção). Podemos fazer 3 × 3 = 9 combinações deles.



tipo de camisa \ tipo de calção	calção A	calção B	calção C
camisa A	camisa A com calção A	camisa A com calção B	camisa A com calção C
camisa B	camisa B com calção A	camisa B com calção B	camisa B com calção C
camisa C	camisa C com calção A	camisa C com calção B	camisa C com calção C

p. 159

Para você fazer

Questão 1

a) Os alunos poderão usar diferentes soluções como:

165 + 345 + 90 = 600
600 ÷ 15 = 40
40 × 4,00 = 160,00

ou

165 ÷ 15 = 11
345 ÷ 15 = 23
90 ÷ 15 = 6
11 + 23 + 6 = 40
40 × 4,00 = 160,00

b) Podem ser feitos esquemas representando as diversas viagens das balsas e contá-las.
Pode-se, também, pensar que o total de automóveis a serem transportados de Guarujá a Bertioga é de 275 (já que, de Bertioga a Guarujá, a quantidade é menor e aproveita as voltas para levar automóveis de Guarujá a Bertioga): 275 ÷ 25 = 11. Portanto, serão necessárias 11 viagens de ida para Bertioga: 6 viagens feitas pela balsa que está inicialmente em Guarujá (balsa G) e 5 viagens pela balsa que está inicialmente em Bertioga (balsa B).
Contando as respectivas voltas a Guarujá (onde está o ponto final das viagens: o estaleiro), a balsa G fará 12 viagens e a balsa B, uma a menos, 11 viagens, pois ela começa em Bertioga.
Este é um problema em que o raciocínio é facilitado se trabalharmos inicialmente com números menores (por exemplo, 21 carros no Guarujá e 12 em Bertioga, cada balsa levando 6 automóveis por vez).

Questão 4

a) O primeiro aluno compreendeu perfeitamente o processo de agrupamentos e trocas utilizado na divisão e apenas se enganou no resultado da tabuada (8 × 6 = 54).
O segundo aluno, aparentemente, dividiu 56 por 6, encontrando quociente 9 e resto 2; a seguir, dividiu 8 por 6, encontrando quociente 1 e resto 2. Isso mostra que ele não tem a menor noção do valor posicional de cada algarismo no número representado.

b) O primeiro aluno deve apenas ser alertado para observar melhor os resultados de suas contas. Pode, por exemplo, tirar a prova: 84 × 6 = = 504 e 504 + 4 = 508, resultado diferente de 568.
Quanto ao segundo, será necessário fazer todo um trabalho com materiais que permitam realizar agrupamentos e trocas em bases variadas, para chegar ao valor posicional dos algarismos.

Questão 5

Qualquer conta pode ser feita em qualquer ordem, desde que se compreenda o que significa o valor posicional de cada algarismo do número representado. O que ocorre é que os algoritmos tradicionais utilizam a ordem mais prática, ou seja, a que dá menos trabalho para realizar.

Questão 6

C	D	U
3	4	5
1	7	3 +
4	~~11~~	8
1 +	1	
5		

345 + 173 = 518

Questão 7

a)

C	D	U 12
7	5	~~10~~ 2 −
2	3	6
5	~~2~~	6
	1	

752 − 236 = 516

b)

C	D	U
	3	5
×		6
1 +	8 +	(30)
1	3	0
2	~~11~~ 1	

35 × 6 = 210

c)

C	D	U	3
3	5	8	
3	3	6	1 1 (2 +7)
0	2	2	C D U
	20 +		
	22		
	21 −		
	1		

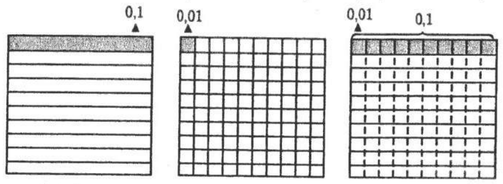
começar das unidades:
8 ÷ 3 = 2 e sobram 2
Como sobram 2 dezenas, elas vão para as unidades (20 unidades) que se juntam às 2 que estão no resto, dando 22.
Fazemos nova divisão: 22 ÷ 3 = 7.
Assim, nas unidades há 2 + 7 = 9.

358 ÷ 3 = 119

Capítulo 8

p. 207

c) 1 ÷ 10 = 0,1 d) 1 ÷ 100 = 0,01 e) 0,1 ÷ 10 = 0,01



p. 215

Para você fazer

Questão 1

Pode-se explicar que $15 = {}^{15}/_{1}$, retomando a idéia de que o número fracionário serve para representar o resultado de uma divisão qualquer de dois números naturais (com o segundo número diferente de zero), ou seja, $a \div b = {}^{a}/_{b}$ $(b \neq 0)$.
Assim, como sabemos que 15 ÷ 1 = 15, podemos escrever que $15 = {}^{15}/_{1}$

Questão 3

Comparando a produção de cada um dos alunos, observa-se que:

- O primeiro aluno sabe aplicar corretamente todas as regras que deve ter aprendido em sua escola. Para avaliar seu domínio sobre os conceitos envolvidos, será necessário apresentar-lhe algumas novas questões.
- O segundo demonstra perfeito domínio dos conceitos de fração e de equivalência de frações, pois resolve as questões de modo correto e eficiente, sem necessidade de recorrer a regras decoradas.

p. 216

Questão 4

a) A barra contém 10 quadradinhos, logo está representando 1 dezena. A placa, contendo 100 quadradinhos, representa 1 centena.

b) Se a placa representa 1 unidade, a barra, que é a sua décima parte, estará representando 1 décimo. O quadradinho, que é a centésima parte da placa, representará 1 centésimo.

c) Se a barra do Material Dourado representar 1 unidade, o cubinho, que é sua décima parte, estará representando 1 décimo.
O cubo grande contém 100 barras, porque ele contém 10 placas, e cada placa contém 10 barras. Assim, diremos que o cubo grande representará 1 centena.

d) A parte pintada corresponde a $1/4$ do cubo, ou seja: o resultado de 1 ÷ 4. Realizando esta divisão, teremos:

c)

U	déc.	cent.	4
1			0, 2 5
0	10	20	U déc. cent.
1	8	20	
	2	0	

Portanto, a parte colorida representa 0,25 do cubo.

Questão 5

a) À escola A coube 0,2 do campo; à escola B coube 0,1 do campo; à escola C coube 0,3 do campo, as demais escolas ficaram com 0, 4 do campo.

b) 0,2 + 0,1 + 0,3 = 0,6 do campo

c) 1,0 − 0,6 = 0,4 do campo

p. 217

Questão 6

Para determinar a parte do total que cada elemento da planta ocupa, é necessário escolher uma "unidade de referência". Analisando a figura, percebe-se que ela pode ser toda repartida em quadradinhos do tamanho de um dos que são ocupados pela Segurança. Assim, teremos um quadriculado 10 × 10, ou seja, com 100 "unidades de referência". A partir desta descoberta, o problema fica muito simples:
M (moradia) corresponde a 0,31 da figura
A (administração) corresponde a 0,03 da figura
L (lazer) corresponde a 0,20 da figura
S (segurança) corresponde a 0,02 da figura
C (circulação) corresponde a 0,44 da figura

As respostas às questões:

a) construção A: 0,03 do total
b) construção M: 0,31 do total
c) as construção L e M juntas: 0,20 + 0,31 = = 0,51 do total
d) as construções A e S juntas: 0,03 + 0,02 = = 0,05 do total
e) diferença entre áreas M e L: 0,31 − 0,20 = = 0,11 do total
f) circulação: 0,44 do total

Questão 7

Em geral, estas questões são trabalhadas na 4ª ou 5ª série, dependendo do planejamento de cada escola.

Questão 8

48 ÷ 8 = 6 doces por caixa
Se o divisor passar à metade do que era, o quociente passará ao dobro do anterior: 12 doces por caixa (48 ÷ 4 = 12).
Se o dividendo passar à metade do que era, o quociente passará à metade do anterior: 3 doces por caixa (24 ÷ 8 = 3).

Se o dividendo e o divisor passarem à metade do que eram, o quociente se mantém o mesmo: 6 doces por caixa (24 ÷ 3 = 6).

Questão 9

$$3{,}5 \div 0{,}5$$

- *1º modo*: 0,5 é a metade do inteiro; então, é prático multiplicarmos por 2 cada termo da divisão.

$$3{,}5 \div 0{,}5 = 7 \div 1 = 7$$

- *2º modo*: para eliminar as casas decimais, podemos multiplicar por 10 cada um dos termos da divisão.

$$3{,}5 \div 0{,}5 = 35 \div 5 = 7$$

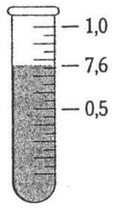
pg. 218

Questão 10

a) 0,2 + 0,3 = 0,5

b) 0,36 + 0,4 = 0,76

U	déc.	cent.	
0,	3	6	
0,	4	0	+
0,	7	6	



c) 4,2 + 2,64 = 6,84 u
7 − 6,84 = 0,16 u
Para encher o frasco, ainda faltam 0,16 da mistura.

U	déc.	cent.	
4,	2	0	
2,	6	4	+
6,	8	4	

U	déc.	cent.	
7,	0	0	
6,	8	4	−
0,	1	6	

d) 1 − 0,02 = 0,98 u
Para completar 1 u da mistura, falta acrescentar 0,98 u da segunda substância.

U	déc.	cent.	
1,	0	0	
0,	0	2	−
0,	9	8	

Questão 11

a) 1 − 0,7 = 0,03

U	déc.	
1,	0	
0,	7	−
0,	3	

b) 0,23 + 1,2 + 2 = 3,43

U	déc.	cent.	
0,	2	3	
1,	2	0	+
2,	0	0	
3,	4	3	

c) 7 − (4,2 + 2,64) = 7 − 6,84 = 0,16

U	déc.	cent.	
4,	2	0	
2,	6	4	+
6,	8	4	

U	déc.	cent.	
7,	0	0	
6,	8	4	−
0,	1	6	

d) (0,3 + 1,42) − 0,18 = 0,54

U	dec.	cent.	
0,	3	0	
1,	4	2	+
1,	7	2	

U	déc.	cent.	
1,	7	2	
0,	1	8	−
0,	5	4	

Questão 12

A superfície da sala a ser acarpetada mede 5,5 m × 3,8 m:

$$\begin{array}{r} 5,5 \text{ m} \\ \times\ 3,8 \text{ m} \\ \hline 440 \\ 165 \\ \hline 20,90 \text{ m}^2 \end{array}$$

Como cada m² custa R$ 4,00, dona Lúcia gastará:

$$\begin{array}{r} 20,9 \\ \times\ 4,00 \\ \hline 83,600 \end{array}$$

ou R$ 83,60

Questão 13

Cada varal gasta 2,65 m de náilon; então, 3 varais gastarão o triplo:

$$\begin{array}{r} 2,65 \text{ m} \\ \times\ 3, \\ \hline 7,95 \text{ m} \end{array}$$

7,95 m < 10 m

Vemos que 10 m de náilon serão suficientes para fazer os 3 varais.

Questão 14

0,3 + 0,28 = 0,58 da peça
1 − 0,58 = 0,42 da peça
0,42 ÷ 2 = 0,21 da peça

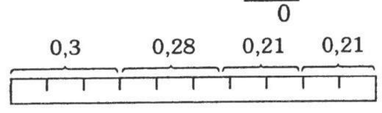
U	déc.	cent.	
0,	3	0	
0,	2	8	+
0,	5	8	

U	déc.	cent.	
1,	0	0	
0,	5	8	−
0,	4	2	

0,42 ÷ 2 =
(×100 (×100
42 ÷ 200 = 0,21

DU	déc.	cent.	
42			200
0			0, 2 1
42	420		U déc. cent.
	400	200	
	020	200	
		0	

a)



b) A barraca das Argolas receberá 0,21 da peça.

c) Se a peça toda tem 100 m e a barraca da Pescaria vai receber 0,28 dela, basta calcular:

$$0{,}28 \times 100 \text{ m} = 28 \text{ m}$$

pg. 219

Questão 15

60 kg ÷ 8 = 7,5 kg
Em cada caixa serão colocados 7,5 kg de tomates.

D	U	déc.	
6	0		8
5	6	40	7, 5
	4	40	U déc.
		0	

Questão 16

Dependendo da realidade de sua escola, estas questões são convenientes para a 4ª ou 5ª série. Pesquise com as professoras.

Questão 17

Você já deve ter descoberto o engano do aluno, não é?
Ele não está comparando 1/5 e 1/6 do mesmo inteiro! Comparou 1/5 de 10 cm com 1/6 de 12 cm.

Capítulo 9

p. 265

Para você fazer

Questão 1

b) Você vai observar que a quantidade mínima de cores que você vai precisar é 4.
Esta é uma propriedade muito conhecida e fácil de ser verificada, porém dificílima de ser demonstrada como teorema.

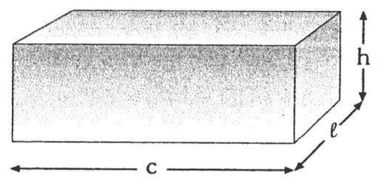
Questão 2

a) Duas cores, naturalmente!

b) Para nossa surpresa, usamos apenas *uma* cor. Esta faixa não possui interior nem exterior!

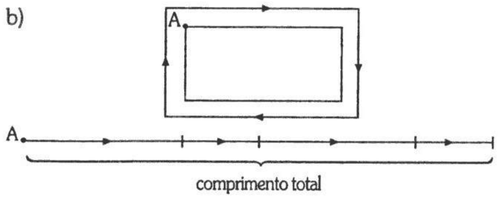
Questão 3

a)



Precisamos saber quais são as medidas do comprimento (c), da largura (ℓ) e da altura (h) do tijolo. Esta é uma figura tridimensional.

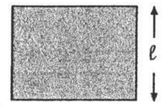
b)



Para comprar rodapés, o construtor deverá conhecer o perímetro da sala, ou seja, a soma dos comprimentos das 4 paredes.

Neste caso, ele usa o comprimento total, figura de 1 dimensão.

p. 267



c) Para saber qual a superfície que terá à sua disposição para colocar os móveis, esta pessoa necessita conhecer a área do salão, o que depende de conhecer o comprimento (c) e a largura (ℓ) do salão (A = c × ℓ).

A superfície da sala tem duas dimensões.

Questão 4

Na "casinha" do exemplo existem: 10 vértices (V); 7 faces (F); 15 arestas (A).
Continua valendo a relação de Euler:

$$V + F = A + 2$$
$$10 + 7 = 15 + 2$$

Questão 6

a) Você encontrará muitos moldes (11) para o cubo. Alguns deles estão no item b desta atividade.

p. 268

Questão 7

a) Podemos montar uma caixa fechada com os moldes 3 e 8.

b) Necessitam de mais uma face, para fechar a caixa, os moldes 4 e 1.

c) Para fechar com mais duas faces, os moldes 5 e 6.

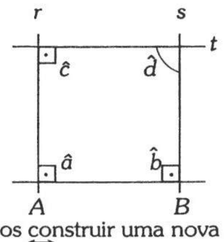
d) Os moldes que necessitam de mais 3 faces para fechar são o 2 e o 7.
Montadas as caixas, suas formas podem ser classificadas em:

Prismas	Pirâmides
molde 2: hexaedro regular (ou cubo)	molde 1: tetraedro regular
molde 3: idem	molde 4: pirâmide reta de base retangular
molde 5: prisma reto de base triangular	molde 8: pirâmide reta de base quadrada
molde 6: prisma reto de base retangular (ou paralelepípedo)	
molde 7: prisma reto de base hexagonal	

Questão 8

Realmente não é possível construir um quadrilátero com três ângulos retos e um ângulo não-reto. Pode-se explicar isto por dois modos diferentes:

a) Pela fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo:
$S_i = (n - 2) \cdot 180°$ ou $S_i = 2 \cdot 180° = 360°$, sendo n o total de lados do polígono.
No caso do quadrilátero, temos $n = 4$, e a soma fica $S_i = (4 - 2) \cdot 180°$ ou $S_i = 2 \cdot 180° = 360°$.
Se já tivermos três ângulos retos, a soma de suas medidas vale 270° e faltam 90° para completar 360°. Assim, se há três ângulos retos no quadrilátero, o quarto é obrigatoriamente reto também.

b) Pela construção do quadrilátero:


Construindo 2 ângulos retos $\hat{a}$ e $\hat{b}$ temos as retas r e s paralelas.
Para construir um terceiro ângulo reto $\hat{c}$, por exemplo, na reta r, iremos construir uma nova reta t que é paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$. A reta t corta a reta s, formando um outro ângulo $\hat{d}$ que também é reto, pois seus lados são paralelos aos lados do ângulo reto $\hat{a}$ ($\overleftrightarrow{AB} \parallel t$ e $r \parallel s$).

Questão 9

Como já citado na resposta anterior, a soma de todos os ângulos internos de qualquer quadrilátero é igual a $S_i = (n - 2) \cdot 180°$, em que $n = 4$, por ser o total de lados do quadrilátero, ficando $S_i = 2 \cdot 180° = 360°$.

Questão 10

a) Se as estradas têm a mesma largura, a quantidade de asfalto a ser gasta em cada uma é diretamente proporcional ao seu comprimento: a estrada de 600 km tem o triplo do comprimento daquela de 200 km; então na primeira será gasto o triplo da quantidade de asfalto da segunda.

b) As grandezas aqui envolvidas são: velocidade da bicicleta e tempo gasto por ela para cobrir o percurso (inversamente proporcionais). Se a velocidade média da bicicleta de André é menor que a de Sílvio, ele levará mais tempo para cobrir o percurso do que Sílvio.

c) Se leio a mesma quantidade de páginas em cada livro, as grandezas que variam são: quantidade de páginas de cada livro e total de noites necessárias para lê-lo (diretamente proporcionais). Assim, se o livro A tem mais páginas que o livro B, gastarei mais noites para ler o livro A do que para ler o livro B.

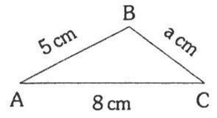
d) Se ambos os livros têm a mesma quantidade de páginas, as grandezas envolvidas na questão são o total de páginas lidas por noite e a quantidade de noites que levará para lê-los (ou seja, grandezas inversamente proporcionais). Então, para ler o livro C, ela vai gastar $1/3$ do total de noites que gastará para ler o livro D. Isto, porque junto lê, por noite, o triplo de páginas do livro C, comparado ao livro D.

e) As grandezas aqui envolvidas são: comprimento do tecido comprado e preço por metro do tecido. Quanto mais tecido comprar, mais dinheiro gastará e vice-versa. Comprando 2,80 m de tecido, sua despesa irá diminuir em relação ao que gastaria, comprando 5 m deste tecido.

Questão 11

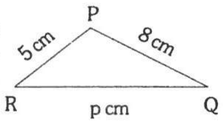
Vimos que, para os 3 lados "fecharem" o triângulo, cada lado deve ser menor que a soma dos outros dois. Assim, podemos ter duas soluções:

- considerando o lado de 8 cm como o *maior lado* do triângulo, podemos considerar o terceiro lado (a) com uma medida cuja soma com 5 cm seja maior que 8 cm.



$8 < 5 + a$. Então, temos de escolher $a > 3$ cm e $a < 8$ cm, pois o lado de 8 cm é o maior do triângulo.

- considerando que o lado que procuramos (p) será o maior lado deste triângulo, ele deverá ter um comprimento menor que a soma dos outros dois.



$p < 5 + 8$. Então, temos de escolher $p < 13$ cm e $p > 8$ cm, pois o lado de tamanho p é o maior do triângulo.

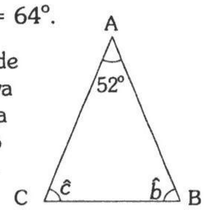
Questão 12

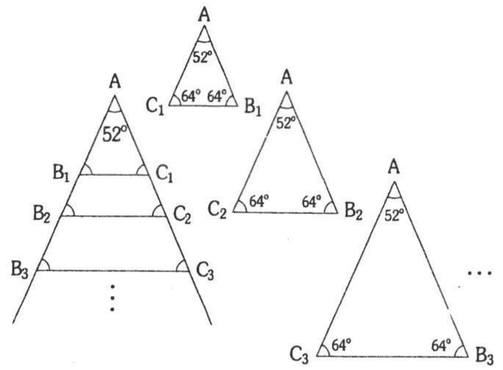
Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180°.
Então: $52° + m(\hat{c}) + m(\hat{b}) = 180°$
e $m(\hat{c}) + m(\hat{b}) = 128°$.

Sabemos também que em todo triângulo isósceles os ângulos da base têm medidas iguais.

Então: $m(\hat{c}) = m(\hat{b}) = \frac{128°}{2} = 64°$.

Isso significa que a forma de qualquer triângulo que resolva este problema já está definida pelos 3 ângulos internos. Só o que irá variar serão as medidas de seus lados:

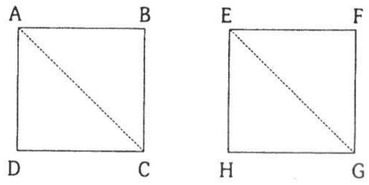




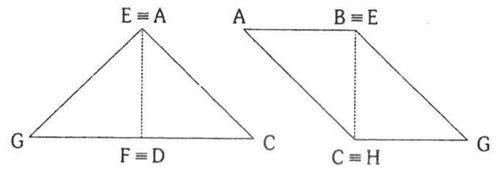
Capítulo 10

p. 272

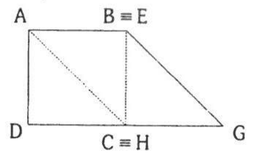
Questão 1



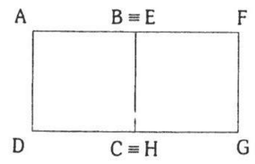
b) Com 4 triângulos disponíveis, escolhemos 2 quaisquer. Por exemplo:

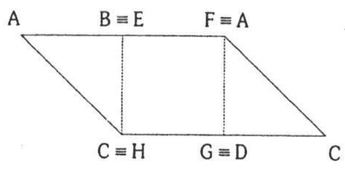


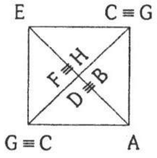
c) Uma das soluções:



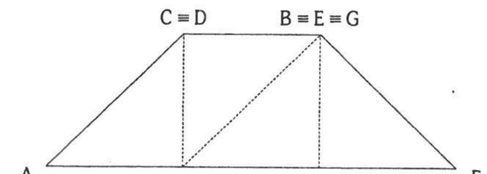
d) Algumas soluções:





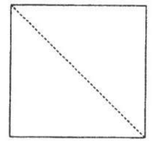


e) Uma das soluções:

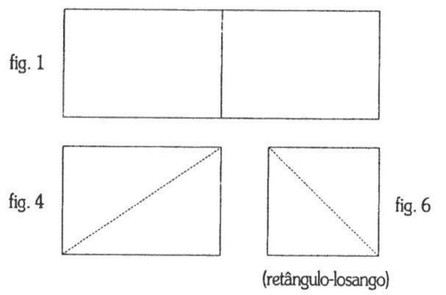


Questão 2

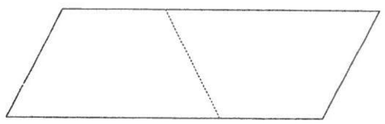
a) Para construir o quadrado, usa-se a figura 6:



b) Para obter um retângulo, pode-se usar:

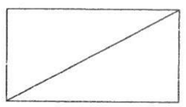


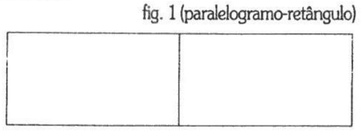
c) Com os dois trapézios:

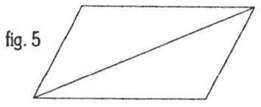


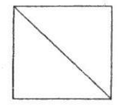
d) Para um novo paralelogramo, pode-se usar:







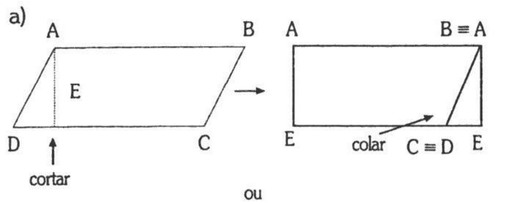




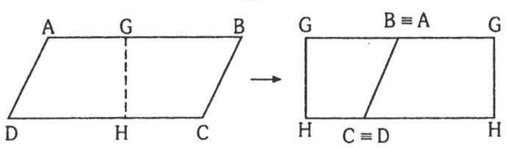
e) A solução está no item *d*, usando-se a figura 5.

Questão 3

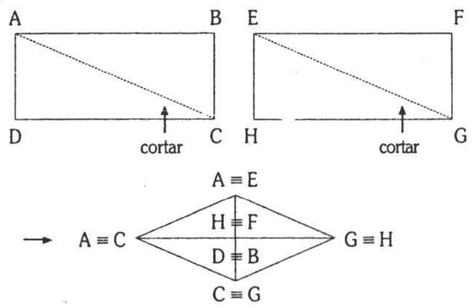
a)



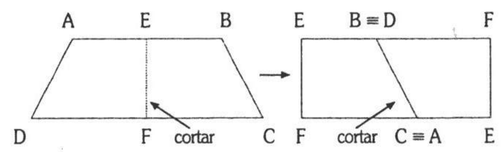
ou



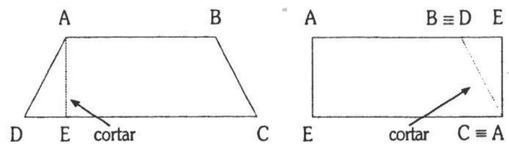
b)



c) Uma das soluções:



Outra solução:

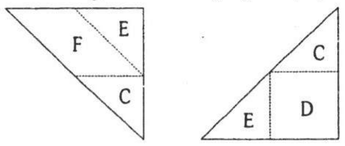


p. 273

Questão 4

Item *d*

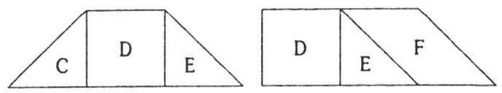
- Construímos um novo triângulo com as peças A e B ou com C e E (soluções já construídas).
- Construímos um triângulo com as peças C, F, E ou C, D, E:



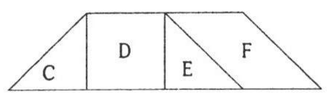
- Para o trapézio com 2 peças: D e C ou C e F:



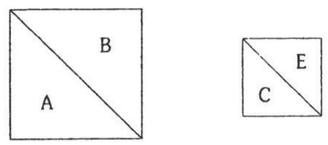
- Para o trapézio com 3 peças: D, C, E ou D, E, F:



- Para o trapézio com 4 peças: C, D, E, F:



- Para o quadrado com 2 peças: A e B ou C e E:



- Para o quadrado com 3 peças: G, C, E:



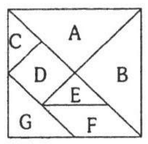
- Para o quadrado com 4 peças: A, C, D, E / A, C, E, F / A, C, E, G:



- Para o quadrado com 5 peças: C, D, E, F, G:



- O quadrado com 7 peças é o próprio jogo inicial, não é?



p. 274

Quantidade de ladrilhos de cada tipo necessária para cobrir o piso.

tipo de ladrilho	▭	□	◺	◺
quantidade necessária	12	24	24	48

p. 276

Situação 1

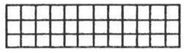
Figura	a	b	c	d	e	f
Área	16 q	16 q	20 q	36 q	20 q	
Perímetro	20 ℓ	16 ℓ	32 ℓ	24 ℓ	26 ℓ	

p. 277

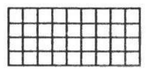
Situação 2

Questão 1

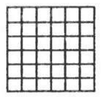
Para ter 36 u de área, pode-se organizar, no papel quadriculado, uma série de figuras e examinar cada caso. Como a área é de 36 u, pode-se pensar em grupos de quadradinhos alinhados, como:



área: $3 \times 12 = 36$ u
perímetro: $12 + 3 + 12 + 3 = 30$ ℓ



área: $4 \times 9 = 36$ u
perímetro: $9 + 4 + 9 + 4 = 26$ ℓ

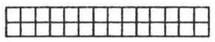


área: $6 \times 6 = 36$ u
perímetro: $6 + 6 + 6 + 6 = 24$ ℓ

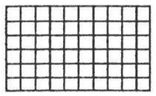
Concluímos que a melhor forma é a quadrada.

Questão 2

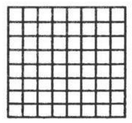
Aproveitando a experiência do exercício anterior, pode-se concluir que a *mesma área* foi obtida em vários quadriláteros, e o de *menor perímetro* foi o quadrado. Então, a forma mais próxima do quadrado deve ser a melhor, por ter área maior, com o mesmo perímetro. Por exemplo:



área: $14 \times 2 = 28$ u
perímetro: $14 + 2 + 14 + 2 = 32$ ℓ



área: $10 \times 6 = 60$ u
perímetro: $10 + 6 + 10 + 6 = 32$ ℓ



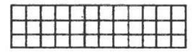
área: $8 \times 8 = 64$ u
perímetro: $8 + 8 + 8 + 8 = 32$ ℓ

Observações:

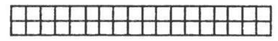
1. Não existe uma relação de proporcionalidade entre área e perímetro, pois a variação de uma das grandezas (aumentando ou diminuindo) não obriga uma variação correspondente para a outra grandeza.
2. Dos retângulos de mesmo perímetro, o de *maior área* é o quadrado.
   Dos retângulos de mesma área, o de *menor perímetro* é o quadrado.

Questão 3

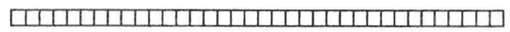
Agora, a Academia quer a pista mais longa possível, com área de 36 u. Voltando ao raciocínio anterior, concluímos que o retângulo de comprimento bem maior que a largura produz este resultado. Por exemplo:



área: $3 \times 12 = 36$ u
perímetro: $3 + 12 + 3 + 12 = 30$ ℓ



área: $2 \times 18 = 36$ u
perímetro: $2 + 18 + 2 + 18 = 40$ ℓ



área: 1×36 u
perímetro: $1 + 36 + 1 + 36 = 74$ ℓ
(esta solução talvez não seja conveniente, por tornar a pista muito estreita)

p. 287

O comprimento do quarteirão, ou seja, o perímetro, é de 4 hm (ou 400 m).

p. 288

Respostas de "outras atividades podem ser realizadas pelos alunos":

- 1 quarteirão mede 400 m. Como 1 km tem 1 000 m, corresponde a dar 2 voltas completas no quarteirão (800 m) e mais 200 m, que corresponde à metade do quarteirão. Ao todo, são $2\ 1/2$ voltas no quarteirão.

- Em metros, o quarteirão tem 400 m. Em km, usando a tabela, teremos a medida correspondente:

km	hm	dam	m
0,	4	0	0

Então: 400 m = 0,400 km ou 0,4 km

p. 298

Questão 4

a) Quantidade necessária: $^3/_4$ de litro, ou:

$$\frac{3}{1} \times 1\,000\ m\ell = \frac{3}{4} \times \frac{1000\ m\ell}{1} = 750\ m\ell$$

Para obter a quantidade necessária, dona Rosa deverá comprar:

- 3 embalagens de 300 mℓ, ou 900 mℓ. Ao preço de R$ 1,70 cada, ela gastará $1,70 \times 3 = R\$\ 5,10$.

  Ou:

- 2 garrafas de $^1/_2$ litro, ou 500 mℓ. Ao preço de R$ 2,50 cada, ela gastará $2,50 \times 2 = R\$\ 5,00$.

  Vemos que a melhor opção é a segunda, pois dona Rosa gastará menos e terá uma sobra maior para usar em outras receitas.

b) Os três meninos juntos: 144,5 kg. Sem André: 99,2 kg. Então a diferença é o peso de André: 144,5 − 99,2 = 45,3 kg.

Como 99,2 kg corresponde ao peso de Beto e Celso juntos, quando Beto desceu da balança, o peso registrado corresponde ao de Celso: 48 kg e 200 g, ou 48,2 kg. O peso de Beto é, portanto, a diferença: 99,2 kg − 48,2 kg = = 51,0 kg ou 51 kg.

c) peso do elefantinho: 1,5 t ou 1 500 kg
peso da girafa: 650 kg
peso do búfalo: 30 @ ou 30 × 15 kg = 450 kg
Então, o triplo do peso do búfalo é 3 × 450 kg = = 1 350 kg (menos que o peso do elefantinho).

A metade do peso do elefantinho é 1 500 kg ÷ ÷ 2 = 750 kg (mais que o peso da girafa).

d) 1ª substância: 32 mℓ
2ª substância: 120 mℓ
$^1/_4$ de litro: $^1/_4 \times 1\,000$ mℓ
ou 1 000 mℓ ÷ 4 = 250 mℓ
Mistura das duas substâncias:
32 + 120 = 152 mℓ

Diferença: 250 − 152 = 98 mℓ quantidade de soro fisiológico

e) 1 ℓ de água equivale a 1 kg ou 1 000 g
1 ℓ de gasolina equivale a 700 g

Então, 5 ℓ de gasolina equivalem a 5 × 700 = = 3 500 g.
1,5 ℓ de água equivalem a 1,5 kg ou 1 500 g
Peso bruto da mistura (com o peso da vasilha):
250 g + 3 500 g + 1 500 g = 5 250 g
ou 5,25 kg
Peso líquido da mistura (sem o peso da vasilha):

3 500 g + 1 500 g = 5 000 g ou 5 kg

f) preço de 1 kg de carne: R$ 5,00
preço de 1,5 kg de carne:
1,5 × 5,00 = R$ 7,50
preço de 1 kg de batatas: R$ 1,20
preço de 5 kg de batatas: 5 × 1,20 = R$ 6,00
preço de 2 kg de feijão: R$ 3,20
despesa: 7,50 + 6,00 + 3,20 = R$ 16,70

preço de 1 kg de queijo: R$ 6,00
preço de 250 g de queijo ou
$^1/_4$ de kg (ou 1 000 g × 4):
R$ 6,00 ÷ 4 = R$ 1,50

U	déc.	cent.
6	0	0
4	20	
2	20	
	0	

4

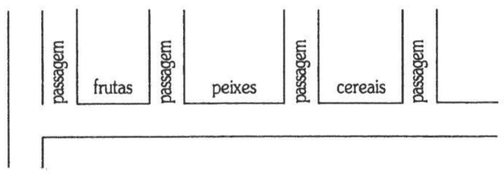
1, 5 0
U déc. cent.

Então: 16,70 + 1,50 = R$ 18,20 (menos que R$ 20,00) dá para comprar o queijo.

p. 299

Questão 9

Nos problemas que envolvem figuras geométricas e/ou medidas, o recurso aos esquemas é sempre um bom auxílio ao raciocínio. Representemos, então, este caso:



Para estas três barracas e as passagens serão usados:
12,8 m + 15,7 m + 18 m + 4 × 0,5 m = 48,5 m o espaço ocupado não chega a 50 m de comprimento

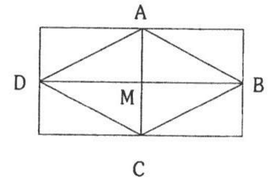
Questão 11

Resposta pessoal.

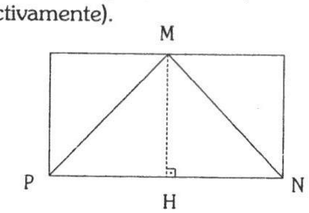
Item *b*

- O maior quadrado possível é aquele que utiliza todo o comprimento do quadriculado. Como os lados do quadrado são sempre de mesma medida, o máximo que podemos aproveitar do quadriculado é o lado de 5 cm. Assim, nosso quadrado terá 5 cm por 5 cm.

- Para o maior losango possível, usaremos o maior comprimento possível para cada uma das diagonais: 8 cm e 5 cm.

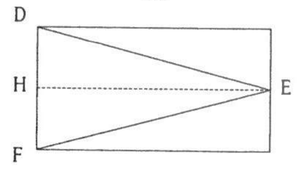


- Para o maior triângulo isósceles possível, usaremos a maior base e a maior altura possíveis: 8 cm e 5 cm, respectivamente (ou 5 cm e 8 cm, respectivamente).



(1ª solução)

ou



(2ª solução)

- O perímetro do quadrado é muito fácil:
  4×5 cm = 20 cm.
  Quanto ao perímetro do losango, ele é aproximado, pois a medida de cada um de seus lados é aproximadamente 4,7 cm (ver observação). Assim, seu perímetro aproximado é 4 × 4,7 cm = = 18,8 cm. A diferença entre os perímetros é 20 − 18,8 = 1,2 cm.

- Do mesmo modo, o perímetro do triângulo isósceles é aproximado, pois cada um de seus lados iguais mede 6,4 cm aproximadamente (ver observação) e o valor aproximado do perímetro é 2 × 6,4 + 8 = 12,8 + 8 = 20,8 cm (na 1ª figura). A diferença entre os perímetros é 20,8 − 20 = 0,8 cm. (Na 2ª figura, cada lado mede aproximadamente 8,3 cm e o perímetro do triângulo é 2 × 8,3 + 5 = 16,6 + 5 = = 21,6 cm; e a diferença entre os perímetros é 21,6 − 20 = 1,6 cm.)

Observações:

a) No losango ABCD, pode-se considerar o triângulo retângulo Δ ABM, onde o lado $\overline{AB}$ é a hipotenusa e os catetos são os lados $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$. Aplicando a este triângulo o teorema de Pitágoras, temos:

$(\overline{AM})^2 + (\overline{MB})^2 = (\overline{AB})^2 \rightarrow 2{,}5^2 + 4^2 = (\overline{AB})^2$

$6{,}25 + 16 = (\overline{AB})^2 \rightarrow \overline{AB} = \sqrt{22{,}25} \cong 4{,}7$ cm

b) No triângulo Δ MNH, calcula-se também a medida do lado $\overline{MN}$ pela aplicação do teorema de Pitágoras:

$(\overline{MH})^2 + (\overline{HN})^2 = (\overline{MN})^2 \rightarrow 5^2 + 4^2 = (\overline{MN})^2$
$\rightarrow \overline{MN} \cong \sqrt{41} \cong 6{,}4$ cm

c) No triângulo Δ EFH, faz-se o mesmo raciocínio:

$(\overline{EH})^2 + (\overline{HF})^2 = (\overline{EF})^2 \rightarrow 8^2 + (2{,}5)^2 = (\overline{EF})^2$
$\rightarrow 64 + 6{,}25 = (\overline{EF})^2$

$\overline{EF} = \sqrt{70{,}53} \cong 8{,}3$ cm

Item *c*

Pode-se ir, por exemplo, de Florianópolis ao Rio de Janeiro (1 142 km) e do Rio de Janeiro a Belo Horizonte (464 km), perfazendo 1 606 km.
Por São Paulo, o roteiro ficaria: Florianópolis a São Paulo são 701 km e São Paulo a Belo Horizonte, 586 km, o que dá um total de 1 287 km. Este é, obviamente, o roteiro mais curto dos dois.